

2.2 Sigui el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

on a és un paràmetre real.

2.2.1 (1 punt) Discuteix el sistema en funció del paràmetre a .

Tenim el sistema (amb $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0, \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

2.2.1 Discussió segons a

Considerem la matriu de coeficients

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El seu determinant és

$$\det(A) = 9a + 27 = 9(a + 3).$$

- Si $a \neq -3$ llavors $\det(A) \neq 0$. Això implica que el sistema és **compatible determinat** (té una única solució).
- Si $a = -3$ llavors $\det(A) = 0$. Cal comparar els rangs de A i de la matriu ampliada $[A \mid \mathbf{b}]$ per decidir si és compatible indeterminat o incompatible. Per $a = -3$ obtindrem $\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid \mathbf{b}]) = 2 < 3$.
Per tant per $a = -3$ el sistema és **compatible indeterminat** (infinites solucions).

No hi ha valors de a que facen el sistema incompatible (ja que quan $\det = 0$ la matriu ampliada té el mateix rang 2).

2.2.2 (0,75 punts) Calcula les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat.

2.2.2 Solucions quan el sistema és compatible indeterminat (cas $a = -3$)

Posem $a = -3$. El sistema queda

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0, \\ 2x - 3y - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

Resolent (per exemple per eliminació), obtenim la família de solucions parametritzada per $t \in \mathbb{R}$ (posant $z = t$):

$$x = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}t, \quad y = \frac{9}{5} - \frac{9}{5}t, \quad z = t.$$

Es pot escriure en forma vectorial

$$(x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0 \right) + t \left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 (0,75 punts) Calcula la solució del sistema per a $a = 0$.

2.2.3 Solució per a $a = 0$

Com que $a = 0 \neq -3$, estem en el cas $\det(A) \neq 0$ i la solució és única. Calculant la solució (o utilitzant la resolució general), obtenim

$$(x, y, z) = (1, 0, 1).$$

(Verificació ràpida: substituint a les tres equacions dona 0, -3 i 3 respectivament.)

Resum final

- Discussió: $\det(A) = 9(a + 3)$.
 - Si $a \neq -3$: sistema **compatible determinat** (única solució).
 - Si $a = -3$: sistema **compatible indeterminat** (infinites solucions).
- Si $a = -3$: solució general

$$(x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right) + t\left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Per $a = 0$: solució única $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.