Problema 2 2 juny 2025 reserva País Valencià (àlgebra MAT).

2.2 Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix},$$

on m és un paràmetre real:

2.2.1 **(0,5 punts)** Calcula el producte AB i la matriu transposada de AB.

2.2.1 Calcula AB i $(AB)^T$

Multipliquem AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + m \cdot 1 & 1 \cdot 2 + m \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m - 1 & 5m + 2 \end{pmatrix}.$$

La transposada és

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & m - 1 \\ 19 & 5m + 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 **(0,75 punts)** En els casos en què A és invertible, calcula la inversa de A.

2.2.2 Inversa de A quan existeix

Per a una matriu 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenim $\det(A) = ad - bc$. Ací

$$\det(A) = 2 \cdot m - 3 \cdot 1 = 2m - 3.$$

Per tant A és invertible $\iff$ $2m - 3 \neq 0$, és a dir $\boxed{m \neq \frac{3}{2}}$.

Si $m \neq \frac{3}{2}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m-3} \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 **(1,25 punts)** Resol l'equació matricial $BX + A^2 = C$.

2.2.3 Resol l'equació matricial $BX + A^2 = C$

Rearranjem: $BX = C - A^2$. Com el determinant de B és $\det(B) = (-1)\cdot 5 - 2\cdot 1 = -7 \neq 0$, B és invertible i

$$X = B^{-1}(C - A^2).$$

Calculem A^2:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+3m \\ 2+m & 3+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6+3m \\ m+2 & m^2+3 \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6+3m \\ m+2 & m^2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix}.$$

Ara B^{-1}. Per $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ tenim $\det(B) = -7$, i

$$B^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Finalment $X = B^{-1}(C - A^2)$. Multiplicant:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix}.$$

Fem les components (les deixem simplificades en forma sobre 7):

- Primera fila, primera columna:

$$x_{11} = -\tfrac{5}{7}\cdot(-7) + \tfrac{2}{7}\cdot(3-m) = 5 + \tfrac{6-2m}{7} = \tfrac{41-2m}{7}.$$

- Primera fila, segona columna:

$$x_{12} = -\tfrac{5}{7}\cdot(-7-3m) + \tfrac{2}{7}\cdot(-3) = \tfrac{35+15m}{7} - \tfrac{6}{7} = \tfrac{29+15m}{7}.$$

- Segona fila, primera columna:

$$x_{21} = \tfrac{1}{7} \cdot (-7) + \tfrac{1}{7} \cdot (3 - m) = \tfrac{-7+3-m}{7} = \tfrac{-4-m}{7}.$$

- Segona fila, segona columna:

$$x_{22} = \tfrac{1}{7} \cdot (-7 - 3m) + \tfrac{1}{7} \cdot (-3) = \tfrac{-7-3m-3}{7} = \tfrac{-10-3m}{7}.$$

Així

$$\boxed{X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 41 - 2m & 29 + 15m \\ -4 - m & -10 - 3m \end{pmatrix}.}$$

Aquest X és la solució de $BX + A^2 = C$; no cal cap restricció sobre m per a l'existència de X perquè B és invertible per a tot m.