Problema 2 A juliol 2025 DANA País Valencià (anàlisi MACS).

Problema 2. A. Una empresa agrícola que es dedica al cultiu de fruites tropicals ha implementat un sistema de reg automatitzat per a optimitzar el consum d'aigua. La funció que descriu la necessitat d'aigua del cultiu (en m^3/dia) després de x dies de creixement, per a x entre 0 i 30, és:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ 3x + 9 & \text{si} \quad 8 < x \le 20 \\ 70 & \text{si} \quad 20 < x \le 30 \end{cases}$$

a) Estudia la continuïtat d'aquesta funció en l'interval $[0, 30]$. *(0,75 punts)*

a) Continuïtat en $[0, 30]$

- En cada tram, f és polinòmica o constant ⇒ **contínua** dins del tram.
- En $x = 8$:

  $$\lim_{x \to 8^-} f(x) = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 512 - 256 + 10 = 266, \qquad \lim_{x \to 8^+} f(x) = 3 \cdot 8 + 9 = 33.$$

  Com que $f(8) = 266$ (primer tram inclou 8) i els límits lateral esquerre i dret són distints, hi ha **discontinuïtat de salt** en $x = 8$.
- En $x = 20$:

  $$\lim_{x \to 20^-} f(x) = 3 \cdot 20 + 9 = 69, \qquad \lim_{x \to 20^+} f(x) = 70, \qquad f(20) = 69 \text{ (pertany al segon tram)}.$$

  També hi ha **discontinuïtat de salt** en $x = 20$.

Conclusió: f és contínua a $[0, 8)$, a $(8, 20)$ i a $(20, 30]$; **discontínua** en $x = 8$ i $x = 20$.

b) Determina en quins dies la necessitat d'aigua és màxima i mínima. *(2 punts)*

b) Dies de màxim i mínim de la necessitat d'aigua

- **Tram** $[0, 8]$: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8).$$

  Punts crítics: $x = 0$ i $x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.

  - Monotonia: decreix en $(0, \frac{8}{3})$ i creix en $(\frac{8}{3}, 8]$.
  - Valors:

$$f(0) = 10, \qquad f\left(\tfrac{8}{3}\right) = \frac{512}{27} - \frac{256}{9} + 10 = \frac{14}{27} \approx 0{,}5185, \qquad f(8) = 266.$$

    Per tant, **mínim local** (i de tot el tram) en $x = \frac{8}{3}$ amb $f = \frac{14}{27}$; màxim del tram en $x = 8$ amb $f = 266$.

- **Tram** $(8, 20]$: $f(x) = 3x + 9$, creixent (pendent 3). Valor mínim del tram a prop de 8^+ (33) i màxim en $x = 20$: $f(20) = 69$.
- **Tram** $(20, 30]$: $f(x) = 70$ (constant).

Comparant tots els valors:

- **Mínim global** a $x = \frac{8}{3}$ amb $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{14}{27} \approx 0{,}5185\ \mathrm{m}^3/\mathrm{dia}$.
- **Màxim global** a $x = 8$ amb $f(8) = 266\ \mathrm{m}^3/\mathrm{dia}$.

c) Calcula l'àrea delimitada per aquesta funció i l'eix OX entre els dies 3 i 7.

(0,75 punts)

c) Àrea delimitada per f i l'eix OX entre $x = 3$ i $x = 7$

Entre 3 i 7 s'aplica el primer tram i $f(x) \geq 0$. Per tant,

$$\mathcal{A} = \int_3^7 (x^3 - 4x^2 + 10)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 10x \right]_3^7.$$

Càlcul:

$$\left(\frac{2401}{4} - \frac{1372}{3} + 70 \right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + 30 \right) = \frac{2555}{12} - \frac{171}{12} = \frac{2384}{12} = \frac{596}{3}.$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{596}{3}\ \mathrm{m}^3 \ \approx 198{,}67\ \mathrm{m}^3.}$$