

Problema 2. A. Una empresa que fabrica pneumàtics per a cotxes ha estudiat el seu desgast, mesurat en una escala de 0 a 1, en funció del temps d'ús. L'empresa fabrica dos tipus de pneumàtics: A i B. Per a un pneumàtic A, el seu desgast D_A després de x mesos d'ús, per a x entre 0 i 50, és donat per la funció $D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. D'altra banda, el desgast D_B per a un pneumàtic B després de x mesos d'ús, per a x entre 0 i 50, és donat per la funció $D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

- a) Determina el nombre de mesos per al qual el desgast és el mateix per als dos tipus de pneumàtics. (1 punt)

a) Nombre de mesos en què el desgast és el mateix

Resolem $D_A(x) = D_B(x)$:

$$\frac{x^2}{3000} = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}.$$

Multiplicant per 3000:

$$x^2 = 30 + 29x \implies x^2 - 29x - 30 = 0.$$

Discriminant $\Delta = 29^2 + 4 \cdot 30 = 841 + 120 = 961$, $\sqrt{\Delta} = 31$. Les solucions són

$$x = \frac{29 \pm 31}{2} \Rightarrow x = 30 \text{ o } x = -1.$$

Com que només considerem $0 \leq x \leq 50$, la solució útil és

$x = 30 \text{ mesos.}$

- b) Determina per a quin interval de mesos el desgast és menor per al pneumàtic A i per a quin interval de mesos el desgast és menor per al B. (1 punt)

b) Intervals en què un pneumàtic té menys desgast

Cal estudiar el signe de $D_B(x) - D_A(x)$:

$$D_B - D_A = \frac{x^2 - 29x - 30}{3000} = \frac{(x - 30)(x + 1)}{3000}.$$

Per $x \in [0, 50]$ tenim $x + 1 > 0$, així que el signe depèn de $x - 30$.

- Si $0 \leq x < 30$, $x - 30 < 0 \Rightarrow D_B - D_A < 0 \Rightarrow D_B < D_A$. Això vol dir que el desgast és menor per al pneumàtic B en $0 \leq x < 30$.
- Si $x = 30$, els desgasts coincideixen.
- Si $30 < x \leq 50$, $x - 30 > 0 \Rightarrow D_B - D_A > 0 \Rightarrow D_B > D_A$. Això vol dir que el desgast és menor per al pneumàtic A en $30 < x \leq 50$.

En resum:

B menys desgast en $[0, 30)$, igual en $x = 30$, A menys desgast en $(30, 50]$.

- c) Calcula l'àrea compresa entre les dues funcions en l'interval en què el desgast és menor per al pneumàtic A, i calcula l'àrea compresa entre les dues funcions en l'interval en què el desgast és menor per al B. (1,5 punts)

c) Àrees entre les dues funcions

Cal integrar la diferència entre les funcions en cada interval on una és menor.

Observem que

$$D_B - D_A = \frac{1}{3000}(x^2 - 29x - 30).$$

Una antiderivada és

$$F(x) = \frac{x^3}{9000} - \frac{29x^2}{6000} - \frac{x}{100}.$$

Àrea on B té menys desgast (interval $[0, 30]$): aquí $D_A > D_B$, així que l'àrea és

$$\text{Area}_{B_menys} = \int_0^{30} (D_A - D_B) dx = - \int_0^{30} (D_B - D_A) dx = -[F(30) - F(0)].$$

Calculem $F(30)$:

$$F(30) = 3 - \frac{87}{20} - \frac{3}{10} = -\frac{33}{20} = -1,65.$$

Per tant

$$\text{Area}_{B_menys} = -\left(-\frac{33}{20} - 0\right) = \boxed{\frac{33}{20} = 1,65}.$$

Àrea on A té menys desgast (interval $[30, 50]$): aquí $D_A < D_B$, així que

$$\text{Area}_{A_menys} = \int_{30}^{50} (D_B - D_A) dx = F(50) - F(30).$$

Calculem $F(50)$:

$$F(50) = \frac{125}{9} - \frac{145}{12} - \frac{1}{2} = \frac{47}{36} \approx 1,30556.$$

Per tant

$$\text{Area}_{A_{\text{menys}}} = \frac{47}{36} - \left(-\frac{33}{20}\right) = \frac{133}{45} \approx 2,95556.$$

Així que

$\text{Area on A és menys} = \frac{133}{45} \approx 2,9556, \quad \text{Area on B és menys} = \frac{33}{20} = 1,65.$
--

(Comprovació ràpida: ambdues àrees són positives i la seva suma dona l'àrea total entre les corbes en $[0, 50]$.)