

Problema 2. A. El valor d'una empresa (en milions d'euros) s'expressa en funció del temps t (en anys) segons la funció $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, per a t entre 2 i 9.

- a) En quin moment aconseguix l'empresa el seu valor màxim i quin és aquest valor?
(0,75 punts)

a) Moment i valor màxim

Calculem la derivada i trobem el vertex (paràbola cap avall, $a = -1 < 0$, així que el vertex és un màxim).

$$B'(t) = -2t + 12.$$

Posant $B'(t) = 0$:

$$-2t + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 6.$$

Valor en $t = 6$:

$$B(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 11 = -36 + 72 - 11 = 25.$$

Resposta a): Màxim a $t = 6$ anys; valor màxim = 25 milions d'euros.

b) En quin moment aconseguix l'empresa el seu valor mínim i quin és aquest valor?
(0,75 punts)

b) Moment i valor mínim sobre l'interval $[2, 9]$

Com la paràbola obre cap avall, no hi ha mínim interior (el vertex és màxim). Per tant el mínim en l'interval serà en algun extrem: cal comparar $B(2)$ i $B(9)$.

Calculem:

$$B(2) = -2^2 + 12 \cdot 2 - 11 = -4 + 24 - 11 = 9.$$

$$B(9) = -9^2 + 12 \cdot 9 - 11 = -81 + 108 - 11 = 16.$$

El menor és $B(2) = 9$.

Resposta b): Mínim a $t = 2$ anys; valor mínim = 9 milions d'euros.

- c) En quin període el valor de l'empresa és superior a 24 milions d'euros?
(1,25 punts)

c) Període en què $B(t) > 24$

Resolem l'inequació:

$$\begin{aligned} -t^2 + 12t - 11 &> 24 \\ \iff -t^2 + 12t - 35 &> 0 \end{aligned}$$

Multipliquem per -1 (canvia el signe de l'inequació):

$$t^2 - 12t + 35 < 0.$$

Cal trobar les arrels del polinomi:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 = 144 - 140 = 4.$$

Arrels:

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2}.$$

$$\text{Així } t_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ i } t_2 = \frac{14}{2} = 7.$$

El polinomi $t^2 - 12t + 35$ és < 0 entre les arrels, per tant $B(t) > 24$ per $t \in (5, 7)$.

Com l'interval de definició és $[2, 9]$, la solució és simplement:

$t \in (5, 7)$ (exclusiu dels extrems perquè volem estrictament > 24).

Per informació addicional: $B(5) = 24$ i $B(7) = 24$, per això els extrems no s'inclouen.

d) Calcula la integral següent:

(0,75 punts)

$$\int_3^8 B(t) dt$$

d) Integral $\int_3^8 B(t) dt$

Cal integrar:

$$\int (-t^2 + 12t - 11) dt = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2 - 11t + C.$$

Avaluem de 3 a 8:

Valor a $t = 8$:

$$-\frac{1}{3} \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 - 11 \cdot 8 = -\frac{1}{3} \cdot 512 + 6 \cdot 64 - 88.$$

Càlcul pas a pas:

$$-\frac{1}{3} \cdot 512 = -\frac{512}{3}.$$

$$6 \cdot 64 = 384.$$

$$384 - 88 = 296.$$

$$\text{Convertim } 296 \text{ a terços: } 296 = \frac{888}{3}.$$

$$\text{Sumem: } -\frac{512}{3} + \frac{888}{3} = \frac{376}{3}.$$

Valor a $t = 3$:

$$-\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 33 = -9 + 54 - 33 = 12.$$

Restem:

$$\int_3^8 B(t) dt = \frac{376}{3} - 12 = \frac{376}{3} - \frac{36}{3} = \frac{340}{3}.$$

En valor decimal: $\frac{340}{3} \approx 113,333 \dots$

Units: com $B(t)$ és en milions d'euros i t en anys, la integral dona milions·anys; però si només et demanen el valor numèric, la resposta és:

Resposta d): $\int_3^8 B(t) dt = \boxed{\frac{340}{3}} (\approx 113,33).$