

Problema 2. A. Es considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Es demana:

- a) Estudiar la continuïtat de la funció en l'interval $[0,9]$. (0,75 punts)

a) Continuïtat en $[0, 9]$

1. Primer tram: $\frac{1+x^2}{1+x}$. Per a $0 \leq x < 4$ el denominador $1+x$ no és zero (ja que $x \geq 0$), així que és contínua en tot $[0, 4)$.

$$\text{Valor en } x = 0: f(0) = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Observació útil: fent divisió entera

$$\frac{1+x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{2}{x+1},$$

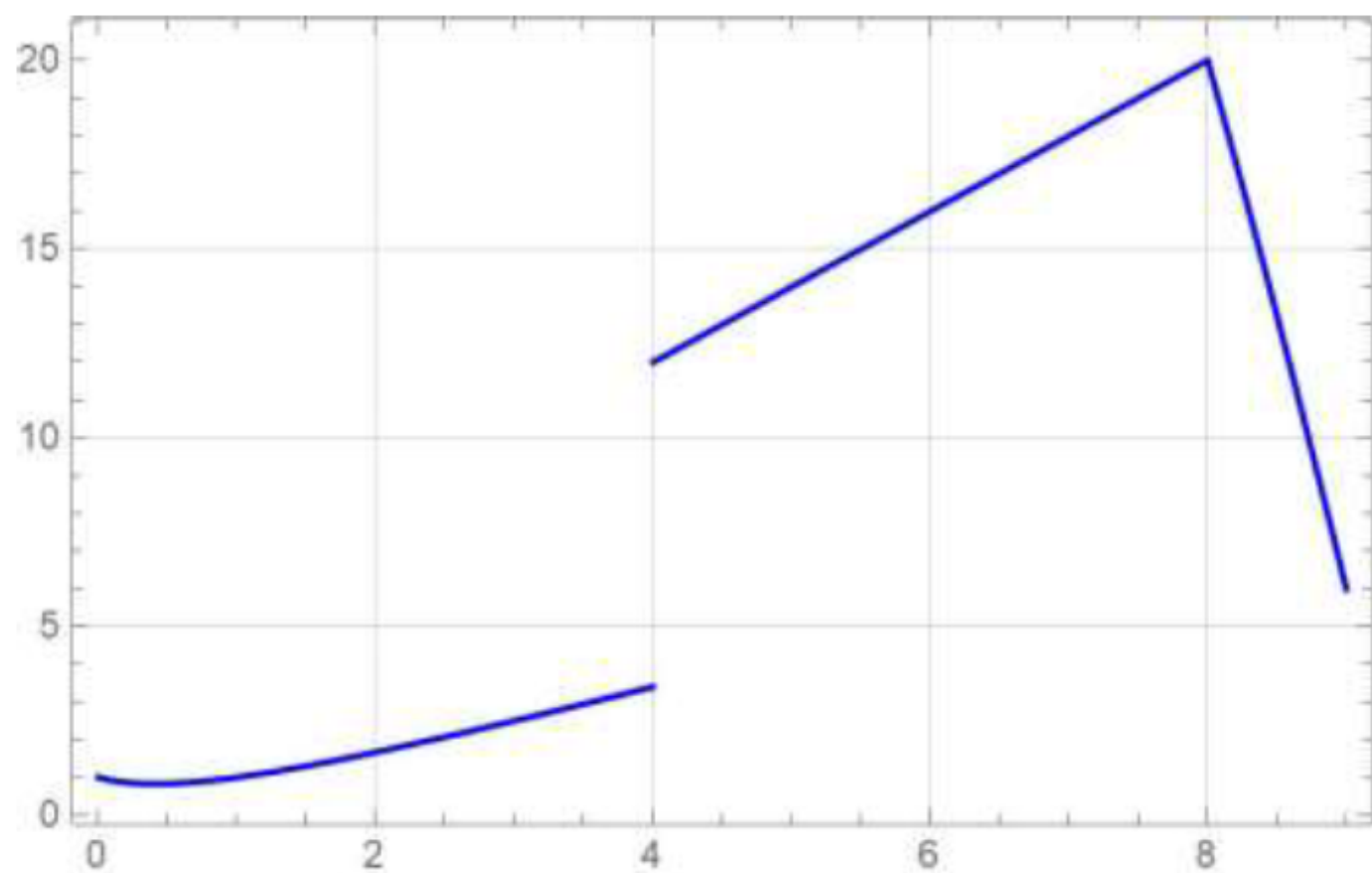
que confirma continuïtat interior del tram.

2. Segon tram: $2x+4$ és polinòmia $\Rightarrow$ contínua en $[4, 8)$. A $x = 4$ el valor d'aquest tram és $f(4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$.
3. Tercer tram: $3x+60-x^2$ és polinomi $\Rightarrow$ contínua en $[8, 9]$. A $x = 8$ el valor és $f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 24 + 60 - 64 = 20$, i a $x = 9$ $f(9) = 27 + 60 - 81 = 6$.

Comprovacions als punts de canvi:

- A $x = 4$: límit pel costat esquerre (usant el primer tram) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+16}{1+4} = \frac{17}{5} = 3,4$. Però $f(4) = 12$. Hi ha una discontinuïtat de salt en $x = 4$.
- A $x = 8$: $\lim_{x \rightarrow 8^-} (2x+4) = 20$ i $f(8) = 20$ (del tercer tram), per tant és continu a $x = 8$.
- A $x = 0$ i $x = 9$ no hi ha problemes (extrems tancats).

Conclusió: f és contínua a tot $[0, 9]$ llevat de $x = 4$, on té una discontinuïtat de salt.



b) Estudiar el creixement i decreixement de la funció en l'interval $[0,9]$. (1,5 punts)

b) Creixement i decreixement a $[0, 9]$

Calculem la derivada en cada tram.

1. Per $0 \leq x < 4$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Anul·lem $f'(x) = 0$:

$$1 - \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 2 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Només interessa la solució dins $[0, 4)$, que és

$$x_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,41421356.$$

Signe de f' :

- Per $0 \leq x < x_1$: $(x+1)^2 < 2 \Rightarrow 2/(x+1)^2 > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decreixent).
- Per $x_1 < x < 4$: $f'(x) > 0$ (creixent).

A $x = x_1$ hi ha un canvi de signe de negatiu a positiu $\rightarrow$ mínim local en aquest tram.

2. Per $4 \leq x < 8$: $f(x) = 2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$. Per tant el tram $[4, 8)$ és estrictament creixent.

3. Per $8 \leq x \leq 9$: $f(x) = 3x + 60 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 3 - 2x$.

- Per $x \in [8, 9]$, $3 - 2x \leq 3 - 16 = -13 < 0$. Així que és estrictament decreixent en $[8, 9]$.

Resum de monotonia:

- Decreixent a $[0, -1 + \sqrt{2})$.
- Creixent a $(-1 + \sqrt{2}, 4)$.
- (Salt discontinu a $x = 4$.)
- Creixent a $[4, 8)$.
- Decreixent a $[8, 9]$.

- c) Trobar els punts en què la funció arriba al màxim i al mínim, i quant val la funció en aquests punts. (0,5 punts)

c) Extrems (màxim i mínim) en $[0, 9]$

Per extrems en un interval tancat cal mirar: punts crítics dins de cada tram, i també els extrems del domini i punts on la funció està definida (incloent $x = 4$, tot i ser discontinu).

Candidats:

- $x = 0$ (extrem esquerre): $f(0) = 1$.
- Punt crític $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ (al primer tram): calculem $f(x_1)$.

Usant $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1}$:

$$f(x_1) = (-1 + \sqrt{2}) - 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Numèric: $2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,82842712$.

- Punt $x = 4$: $f(4) = 12$.
- Punt $x = 8$: $f(8) = 20$.
- Extrem dret $x = 9$: $f(9) = 6$.

Comparant valors:

- $f(x_1) = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,8284$ (el més petit detectat).
- $f(0) = 1$.
- $f(9) = 6$.
- $f(4) = 12$.
- $f(8) = 20$ (el més gran).

Conclusió:

- Mínim absolut en $[0, 9]$ a $x = -1 + \sqrt{2}$ amb valor

$$f_{\min} = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,828427.$$

És també un mínim local (canvi de signe de la derivada de negatiu a positiu).

- Màxim absolut en $[0, 9]$ a $x = 8$ amb valor $f_{\max} = 20$.

A més, $x = 8$ és un màxim local (derivada positiva a l'esquerra, negativa a la dreta).

Nota: $x = 4$ no és extrem local perquè hi ha un salt: límit per l'esquerra és 3,4 i $f(4) = 12$, però la branca dreta augmenta a partir de 12; per tant 4 no és extrem.

- d) Calcular l'àrea de la regió delimitada per aquesta funció, l'eix OX , la recta d'equació $x = 8$ i la recta d'equació $x = 9$. (0,75 punts)

d) Àrea de la regió delimitada per la funció, l'eix OX , $x = 8$ i $x = 9$

En l'interval $[8, 9]$ la funció és $f(x) = 3x + 60 - x^2$. Primer comprovem si la funció és positiva en tot $[8, 9]$:

les dades $f(8) = 20 > 0$ i $f(9) = 6 > 0$. La quadràtica té arrels aproximades fora de l'interval $[8, 9]$, per tant $f(x) > 0$ a tot $[8, 9]$. L'àrea demanada és

$$\text{Area} = \int_8^9 (3x + 60 - x^2) dx.$$

Calculem:

$$\int (3x + 60 - x^2) dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 60x.$$

Avaluant de 8 a 9,

$$\text{Area} = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 60x \right]_8^9 = \frac{837}{2} - \frac{1216}{3} = \frac{79}{6}.$$

Per tant l'àrea és $\boxed{\frac{79}{6}}$ unitats quadrades (aprox. 13,1667).