

Problema 2. A. La temperatura, T , d'un motor depèn de les seues revolucions, r , de manera que entre 0 i 100 revolucions evoluciona seguint una tendència lineal tal que $T(r) = \frac{r}{4} + 25$. No obstant això, a partir de 100 revolucions la temperatura depèn del quadrat de les revolucions, de manera que $T(r) = Ar^2 + B$, amb A i B nombres reals.

- a) Tenint en compte que la funció ha de ser contínua i que la derivada de $T(r)$ en $r=1.600$ val 4, determina A i B . (1,5 punts)

Recordatori de l'enunciat: per $0 \leq r \leq 100$

$$T(r) = \frac{r}{4} + 25$$

i per $r \geq 100$

$$T(r) = Ar^2 + B,$$

amb $A, B \in \mathbb{R}$. A més sabem que la funció ha de ser contínua i que $T'(1600) = 4$.

a) Determinar A i B .

Continuïtat en $r = 100$: els dos ramals han d'assenyalar el mateix valor a $r = 100$. Per tant

$$A \cdot 100^2 + B = \frac{100}{4} + 25.$$

Càlculs:

$$\frac{100}{4} + 25 = 25 + 25 = 50,$$

d'això obtenim

$$10000A + B = 50. \quad (1)$$

La derivada del ramal quadràtic és $T'(r) = 2Ar$. Com que $T'(1600) = 4$,

$$2A \cdot 1600 = 4 \implies 3200A = 4 \implies A = \frac{4}{3200} = \frac{1}{800} = 0,00125.$$

Substituïm A a (1) per trobar B :

$$10000 \cdot \frac{1}{800} + B = 50 \implies 12,5 + B = 50$$

$$B = 50 - 12,5 = 37,5.$$

Per tant

$$\boxed{A = \frac{1}{800} = 0,00125, \quad B = 37,5.}$$

(Observació addicional: la derivada a la dreta en $r = 100$ és $2A \cdot 100 = 200A = 200/800 = 0,25$, que coincideix amb la pendent del ramal lineal $1/4 = 0,25$; per tant la funció és fins i tot derivable en $r = 100$.)

b) Hi ha màxims o mínims per a la temperatura en funció de les revolucions? Justifica la resposta. (1 punt)

b) Hi ha màxims o mínims de T respecte de r ?

- Per $0 \leq r \leq 100$, $T(r) = \frac{r}{4} + 25$ és una recta amb pendent $1/4 > 0$. Així, en aquest interval no hi ha extrem interior (és estrictament creixent); els únics possibles extrems serien en els punts frontera $r = 0$ o $r = 100$.
- Per $r \geq 100$, $T(r) = Ar^2 + B$ amb $A = \frac{1}{800} > 0$. És una parabola oberta cap amunt; la seva derivada $T'(r) = 2Ar$ s'anula en $r = 0$, que no pertany al domini $r \geq 100$. Per a $r > 0$ (i per tant per a tot $r \geq 100$) $T'(r) > 0$. Això implica que el ramal quadràtic és estrictament creixent en el seu domini $r \geq 100$; per tant tampoc té màxim ni mínim interior en aquest tros.

Conclusió: **no hi ha màxims ni mínims interiors** de la funció $T(r)$ en els intervals donats; globalment T és creixent en tot $[0, \infty)$ (p.e. el mínim global és a $r = 0$ i a partir d'ací creix).

- c) Un operari utilitza el motor durant 30 minuts, de manera que en el minut m les revolucions que té el motor són donades per l'expressió $r(m) = 5m - 0,15m^2$. Determina en quins minuts les revolucions són màximes i mínimes, el valor d'aquestes i el valor de la temperatura en aquests moments. (1 punt)

c) Revolucions en funció del minut i extrems

Donada la funció de revolucions en el minut m (amb el motor utilitzat 30 minuts),

$$r(m) = 5m - 0,15m^2, \quad 0 \leq m \leq 30.$$

Cal trobar els minuts on r és màxima i mínima, el valor de r i la temperatura en aquests instants.

Derivada:

$$r'(m) = 5 - 0,3m.$$

Anul·lem per trobar crítics:

$$5 - 0,3m = 0 \implies m = \frac{5}{0,3} = \frac{50}{3} \approx 16,666 \text{ minuts.}$$

Com que $r''(m) = -0,3 < 0$, aquest punt és un **màxim** per a r .

Avaluem r en aquest punt:

$$r\left(\frac{50}{3}\right) = 5 \cdot \frac{50}{3} - 0,15 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2.$$

Càlculs exactes:

$$5 \cdot \frac{50}{3} = \frac{250}{3}, \quad \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{2500}{9}, \quad 0,15 \cdot \frac{2500}{9} = \frac{375}{9} = \frac{125}{3}.$$

Per tant

$$r\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{250}{3} - \frac{125}{3} = \frac{125}{3} \approx 41,666 \text{ revolucions.}$$

Els possibles mínims en l'interval tancat $[0, 30]$ són als extrems:

$$r(0) = 0 \text{ i } r(30) = 5 \cdot 30 - 0,15 \cdot 900 = 150 - 135 = 15.$$

Per tant el **mínim** global en l'interval és a $m = 0$ amb $r = 0$.

Ara calculem la temperatura en aquests moments. Com que els valors de revolucions obtinguts (0, 15, $125/3 \approx 41,67$) són **menors que 100**, fem servir el ramal lineal:

$$T(r) = \frac{r}{4} + 25.$$

- Per $m = 0$: $r = 0 \rightarrow T(0) = \frac{0}{4} + 25 = 25$.
- Per $m = 30$: $r = 15 \rightarrow T(15) = \frac{15}{4} + 25 = 3,75 + 25 = 28,75$.
- Per $m = \frac{50}{3}$: $r = \frac{125}{3} \rightarrow$

$$T\left(\frac{125}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{125}{3} + 25 = \frac{125}{12} + 25 = \frac{125 + 300}{12} = \frac{425}{12} \approx 35,4167.$$

Resum de resultats

a) $A = \frac{1}{800} = 0,00125$, $B = 37,5$.

b) No hi ha màxims ni mínims interiors: T és creixent en $[0, \infty)$.

c)

- Revolucions màximes: en $m = \frac{50}{3} \text{ min} \approx 16,667 \text{ min}$; $r_{\max} = \frac{125}{3} \approx 41,667$. Temperatura en aquest moment: $T = \frac{425}{12} \approx 35,417$.
- Revolucions mínimes (en l'interval considerat): en $m = 0$; $r_{\min} = 0$. Temperatura: $T = 25$.
(En l'extrem $m = 30$ es té $r = 15$ i $T = 28,75$.)