

Problema 2. B. Quan la temperatura d'un hivernacle es manté a x graus centígrads, sent x un nombre real entre 10 i 30, la producció (en quilograms) d'una certa hortalissa és donada per la funció $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$. Sabem que la producció màxima s'aconsegueix quan l'hivernacle es manté a 21 graus centígrads i que aquesta producció màxima és de 5.300 kg.

a) Determina els valors A i B que apareixen en la funció $Q(x)$. (1,5 punts)

$$Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3, \quad x \in [10, 30].$$

a) Determinar A i B

Condicció de màxim a $x = 21$:

$$Q'(x) = 60x + A - 3x^2 \Rightarrow Q'(21) = 0$$

$$1260 + A - 1323 = 0 \Rightarrow A = 63.$$

I $Q(21) = 5300$:

$$Q(21) = 30 \cdot 21^2 + 63 \cdot 21 + B - 21^3 = 13230 + 1323 + B - 9261 = 5292 + B = 5300$$

$$\Rightarrow B = 8.$$

Resposta: $A = 63$, $B = 8$.

b) Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció $Q(x)$.

(1 punt)

b) Creixement i decreixement

Amb $A = 63$,

$$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63.$$

Zeros de Q' : $3x^2 - 60x - 63 = 0 \Rightarrow \Delta = 3600 + 756 = 4356 = 66^2$.

$$x = \frac{60 \pm 66}{6} \Rightarrow x = -1, 21.$$

Com que Q' és una paràbola cap avall, $Q'(x) > 0$ entre -1 i 21 , i $Q'(x) < 0$ fora.

En l'interval demanat:

- **Creix** en $(10, 21)$.
- **Decreix** en $(21, 30)$.

A $x = 21$ hi ha màxim local (i global a $[10, 30]$).

- c) Per a valors de la temperatura compresos entre 10 i 30 graus centígrads, en algun cas s'obté una producció inferior a 1.000 kg? *(1 punt)*

c) Producció inferior a 1000 kg?

Com que l'únic crític dins $[10, 30]$ és un **màxim**, els **mínims** en $[10, 30]$ estan als extrems:

$$Q(10) = 30 \cdot 100 + 63 \cdot 10 + 8 - 10^3 = 3000 + 630 + 8 - 1000 = 2638,$$

$$Q(30) = 30 \cdot 900 + 63 \cdot 30 + 8 - 30^3 = 27000 + 1890 + 8 - 27000 = 1898.$$

El mínim és $Q(30) = 1898 > 1000$.

Resposta: No. La producció mínima en $[10, 30]$ és **1898 kg** (a $x = 30^\circ\text{C}$), per sobre de 1000 kg.