

Problema 2. B. Es considera la funció:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Es demana:

- a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. (0,5 punts)

Donada

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}.$$

Observa el denominador:

$$x(2x+4)+2 = 2x^2+4x+2 = 2(x^2+2x+1) = 2(x+1)^2,$$

per tant la funció es simplifica molt bé a

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

(restringint l'expressió al domini on està definida).

a) Domini i talls amb els eixos

- Denominador $(x+1)^2 = 0$ només si $x = -1$. Per tant el domini és

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- Tall amb l'eix y ($x = 0$): $f(0) = 0$. Punt $(0, 0)$.
- Talls amb l'eix x (solucions de $f(x) = 0$): $x/(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Només la solució $x = 0$.

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(0,5 punts)

b) Asímtotes

- **Vertical:** $x = -1$ és asímtota vertical (no està al domini). Cal mirar límits:

$$\lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

és a dir, per ambdós costats la funció tendeix a $-\infty$. Per tant hi ha asímtota vertical $x = -1$ (amb comportament a $-\infty$ per ambdós costats).

- **Horitzontals:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0$. Per tant hi ha asímtota horitzontal $y = 0$.

- c) Els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals, si n'hi ha. (2 punts)

c) Creixement, decreixement i extrems locals

Cal la derivada. Amb $f(x) = x(x+1)^{-2}$,

$$f'(x) = (x+1)^{-2} + x \cdot (-2)(x+1)^{-3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

- Crítics: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. També f' no està definida en $x = -1$ (discontinuitat vertical).
- Signe de f' per intervals (tenint en compte el cub del denominador):
 - Per $x < -1$: $(x+1)^3 < 0$ i $1-x > 0 \Rightarrow f' < 0$. → **decreix** a $(-\infty, -1)$.
 - Per $-1 < x < 1$: $(x+1)^3 > 0$ i $1-x > 0 \Rightarrow f' > 0$. → **creix** a $(-1, 1)$.
 - Per $x > 1$: $(x+1)^3 > 0$ i $1-x < 0 \Rightarrow f' < 0$. → **decreix** a $(1, \infty)$.
- Això implica un canvi $+$ → $-$ a $x = 1$, per tant **hi ha un màxim local** en $x = 1$.
Valor: $f(1) = 1/(1+1)^2 = 1/4$. Així, màxim local (i també màxim global entre valors finits) en $\boxed{(1, \frac{1}{4})}$.
- Mínims locals: no hi ha punts on f' passi de $-$ a $+$ en punts del domini, així que **no hi ha mínims locals**. A més hi ha una tendència a $-\infty$ apropant-se a $x = -1$, per la qual cosa no existeix mínim global finit.
- Observació de senyal: com $f(x) = x/(x+1)^2$ el signe depèn només de x . Per $x < 0$ la funció és negativa; per $x > 0$ és positiva.

- d) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors. (0,5 punts)

d) Representació gràfica (resum de la forma)

- Asímtotes: vertical $x = -1$ (tendeix a $-\infty$ per ambdues bandes), horitzontal $y = 0$.
- Interseccions: $(0, 0)$.
- Creixement/decreixement: decreix en $(-\infty, -1)$, creix en $(-1, 1)$, decreix en $(1, \infty)$.
- Extrem: màxim local a $(1, \frac{1}{4})$.
- Comportament a l'infinit: $f(x) \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow \pm\infty$.
- Signe: negativa a l'esquerra de 0, positiva a la dreta de 0.

