

Problema 2. B. Es considera la funció:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. (0,5 punts)

a) Domini i talls amb els eixos coordenats

Domini. El denominador no pot ser zero:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2, x \neq 1.$$

Per tant

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

Talls amb l'eix OX (zeros). Els zeros són solucions de $3(x - 3)(x + 3) = 0$, és a dir

$$x = -3 \quad \text{i} \quad x = 3.$$

(Ambdues estan en el domini.)

Tall amb l'eix OY (x=0).

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0 - 27}{0 + 0 - 2} = \frac{-27}{-2} = \frac{27}{2}.$$

Per tant tall amb OY: $\left(0, \frac{27}{2}\right)$.

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(0,5 punts)

b) Asímtotes horitzontals i verticals

Asímtotes verticals. On el denominador s'annul·la i el numerador no:

$$x = -2 \quad \text{i} \quad x = 1$$

són asímtotes verticals. (Comprovació: el numerador $3x^2 - 27$ val $3 \cdot 4 - 27 = -15 \neq 0$ en $x = -2$ i val $3 - 27 = -24 \neq 0$ en $x = 1$.)

Límits laterals (signe) — es poden deduir pel signe dels factors; qualitativament:

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

Asímtota horitzontal. Els polinomis al num. i denom. tenen el mateix grau (2), així que

$$y = \frac{3}{1} = 3$$

és asímtota horitzontal (i $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$).

No hi ha asímtotes obliqües.

c) Els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals, si n'hi ha.
(2 punts)

c) Intervals de creixement i decreixement; màxims i mínims locals (amb valors exactes)

Cal la derivada $f'(x)$. Amb $N(x) = 3x^2 - 27$ i $D(x) = x^2 + x - 2$,

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{D(x)^2}.$$

Hem simplificat el numerador i s'obté (factoritzat):

$$\text{num}(f') = 6x(x^2 + x - 2) - (3x^2 - 27)(2x + 1) = 3(x^2 + 14x + 9).$$

Per tant $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 14x + 9 = 0$. Les arrels són

$$\boxed{x_1 = -7 - 2\sqrt{10}, \quad x_2 = -7 + 2\sqrt{10}}$$

(amb $x_1 < x_2$). Observa que $x_1 < -2 < x_2 < 1$.

Podem escriure el factoratge exacte del numerador:

$$\text{num}(f') = 3(x - x_1)(x - x_2).$$

Com el coeficient principal (3) és positiu, el signe de f' és:

- positiu per $x < x_1$ i per $x > x_2$,
- negatiu per $x_1 < x < x_2$.

Tenint en compte les discontinuïtats en -2 i 1 , els intervals de monotonia dins el domini són:

$$\begin{aligned} (-\infty, x_1) &\rightarrow \text{**creix**}, \\ (x_1, -2) &\rightarrow \text{**decreix**}, \\ (-2, x_2) &\rightarrow \text{**decreix**}, \\ (x_2, 1) &\rightarrow \text{**creix**}, \\ (1, \infty) &\rightarrow \text{**creix**}. \end{aligned}$$

Extrems locals (tipus i valors exactes). Pel canvi de signe de f' :

- A $x = x_1 = -7 - 2\sqrt{10}$ la derivada passa de positiva a negativa $\Rightarrow$ **màxim local**. El valor $f(x_1)$ calculat exactament és

$$f(x_1) = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{3}.$$

- A $x = x_2 = -7 + 2\sqrt{10}$ la derivada passa de negativa a positiva $\Rightarrow$ **mínim local**. El valor exacte és

$$f(x_2) = \frac{22 + 4\sqrt{10}}{3}.$$

(Nota: aquestes fraccions s'obtenen substituint x_i a la funció i simplificant; numèricament coincideixen amb les aproximacions prèviament donades.)

- d) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors. (0,5 punts)

d) Representació gràfica (elements per esbós amb valors exactes)

Punts i línies a marcar al gràfic (tots en valors exactes):

- **Domini:** $x \neq -2$, $x \neq 1$ (trencaments verticals).
- **Asímtotes verticals:** línies verticals $x = -2$ i $x = 1$.
- **Asímtota horitzontal:** $y = 3$.
- **Zeros:** $x = -3$ i $x = 3$.
- **Intercept y:** $(0, \frac{27}{2})$.
- **Extrems locals (exactes):**
 - Màxim local a $x = -7 - 2\sqrt{10}$ amb altura $f(x_1) = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{3}$.
 - Mínim local a $x = -7 + 2\sqrt{10}$ amb altura $f(x_2) = \frac{22 + 4\sqrt{10}}{3}$.
- **Comportament prop de les asímtotes verticals (signe dels límits):**
 - $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.
- **Comportament a l'infinit:** la corba s'acosta a $y = 3$ quan $x \rightarrow \pm\infty$.

Amb aquests elements pots traçar un esbós fidel: a l'esquerra (per $x \ll x_1$) la corba tendeix a 3, puja fins al màxim local en x_1 , baixa cap a $-\infty$ quan s'acosta a $x = -2^-$; salta a $+\infty$ per $x = -2^+$, baixa passant per $(-3, 0)$, arriba al mínim local en x_2 , puja fins a $+\infty$ quan s'acosta a $x = 1^-$; salta a $-\infty$ per $x = 1^+$, després puja, talla OX en $x = 3$ i s'apropa a $y = 3$ per l'dreta infinita.

Gràfica de $f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$

