

Problema 2. B. Es considera la funció:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Es demana:

- a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. (0,5 punts)

Funció:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4(x - 3)(x + 3)}{(x - 4)(x + 2)}.$$

a) Domini i punts de tall amb els eixos

- Denominador nul quan $x - 4 = 0$ o $x + 2 = 0$, és a dir $x = 4$ i $x = -2$. Per tant el domini és

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}.$$

- Tall amb l'eix x (on $f(x) = 0$): bàsicament zeros del numerador (que no s'anul·len amb el denominador). Són $x = 3$ i $x = -3$. Punts: $(3, 0)$ i $(-3, 0)$.
- Tall amb l'eix y (calcular $f(0)$):

$$f(0) = \frac{-36}{-8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Punt: $(0, 9/2)$.

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(0,5 punts)

b) Asímtotes

- Grau del numerador = grau del denominador = 2. Hi ha una asímtota horitzontal:

$$y = \frac{\text{coeficient del } x^2 \text{ del numerador}}{\text{coeficient del } x^2 \text{ del denominador}} = \frac{4}{1} = 4.$$

- Asímtotes verticals on el denominador s'anula: $x = -2$ i $x = 4$.

A més, comprovació de les comportaments laterals (útil per dibuixar):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty.$$

c) Els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals, si n'hi ha.
(2 punts)

c) Intervals de creixement/decreixement i extrems locals

Calculem la derivada (es pot fer amb la regla del quocient). Simplificada s'obté:

$$f'(x) = \frac{8(-x^2 + x - 9)}{x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64} = -\frac{8(x^2 - x + 9)}{x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64}.$$

Observacions:

- El polinomi $x^2 - x + 9$ té discriminant $\Delta = 1 - 36 = -35 < 0$, per tant no té arrels reals i és sempre positiu. Això fa que el numerador $-8(x^2 - x + 9)$ sigui **sempre negatiu** per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- La derivada només pot canviar de signe on estigui indefinida, és a dir en $x = -2$ i $x = 4$ (els pols), o si el denominador canviés de signe; per tant estudiarem els tres intervals definits pels pols: $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, $(4, \infty)$.

Provant amb valors:

- a $x = -3$: $f'(-3) < 0$,
- a $x = 0$: $f'(0) < 0$,
- a $x = 5$: $f'(5) < 0$.

Conclusió: la funció és **decreixent** en cadascun dels intervals

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 4), \quad (4, \infty).$$

No hi ha punts on $f'(x) = 0$ dins del domini, per tant **no hi ha màxims ni mínims locals** (no hi ha extrems locals).

(Resum: monotonia: sempre decreixent en cada peça separada pels asímtotes verticals; cap extrem local.)

d) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors. (0,5 punts)

d) Indicacions per a la representació gràfica (resum de punts clau)

Punts i rectes importants:

- Domini: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$.
- Zeros: $(-3, 0)$ i $(3, 0)$.
- Tall en y : $(0, 9/2)$.
- Asímptotes verticals: $x = -2$ i $x = 4$.
- Asímptota horitzontal: $y = 4$.
- Comportament a prop de les verticals: a cada asímptota, per l'esquerra va a $-\infty$ i per la dreta a $+\infty$.
- La funció és decreixent en cada interval $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, $(4, \infty)$.
- Línia horitzontal $y = 4$ és límit quan $x \rightarrow \pm\infty$. Observació numèrica: $f(0) = 4,5$ està lleugerament per sobre de l'asímptota, els zeros estan per sota, així la branca central $(-2, 4)$ creua l'eix x en -3 i 3 i passa per $(0, 4,5)$.

