

Problema 2. B. Es considera la funció:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$$

Es demana:

- a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. (0,5 punts)

Donada

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x,$$

primer simplifiquem per treballar més còmodament:

$$f(x) = \frac{x - (x - x^3)}{1 - x^2} = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

a) Domini i punts de tall

- Domini: el denominador no pot ser zero, $1 - x^2 \neq 0$. Per tant

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

- Tall amb l'eix x (zeros): $f(x) = 0 \iff x^3 = 0 \implies x = 0$. Punt de tall: $(0, 0)$.
- Tall amb l'eix y : $f(0) = 0 \rightarrow$ el mateix punt $(0, 0)$.

Observació: f és **imparella** (odd), ja que $f(-x) = -f(x)$.

b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.

(0,5 punts)

b) Asímtotes

- **Verticals:** on el denominador s'anula, $x = \pm 1$. Cal estudiar els límits laterals:

- $x \rightarrow 1^-: x^3 \rightarrow 1, 1 - x^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty.$
- $x \rightarrow 1^+: 1 - x^2 \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty.$
- $x \rightarrow -1^-: x^3 \rightarrow -1, 1 - x^2 \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty.$
- $x \rightarrow -1^+: 1 - x^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty.$

Resum: asímptotes verticals a $x = -1$ i $x = 1$, amb comportaments:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

- **Horitzontals / obliqües:** cal estudiar $x \rightarrow \pm\infty$. Amb la forma simplificada:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2} = -x - \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Per tant

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0.$$

Hi ha una **asímtota obliqua**: $y = -x$. No hi ha asímtota horitzontal.

- c) Els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals, si n'hi ha.
(2 punts)

c) Derivada, monotonia i extrems locals

Calculem la derivada (més fàcil a partir de la forma $x/(1-x^2) - x$):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x^2} \right) = \frac{(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Per tant

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} - 1 = \frac{1+x^2 - (1-x^2)^2}{(1-x^2)^2}.$$

Expandint i simplificant s'obté

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Zeros i punts no definits:

- Derivada zero quan $x^2(3-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$.
- Derivada no definida en $x = \pm 1$ (fora del domini).

Comportament del signe (el denominador és sempre positiu a la part del domini):

- Si $|x| < \sqrt{3}$ i $x \neq 0$, $3-x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (creixent).
- Si $|x| > \sqrt{3}$, $3-x^2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decreixent).
- En $x = 0$, $f'(0) = 0$ però la funció és creixent a l'esquerra i a la dreta (no canvi de signe).

Per tant, separant pels punts crítics i les asímptotes verticals (i recordant l'ordre numèric $-\infty < -\sqrt{3} < -1 < 0 < 1 < \sqrt{3} < \infty$):

- f és **decreixent** en $(-\infty, -\sqrt{3})$.
- f és **creixent** en $(-\sqrt{3}, -1)$.
- f és **creixent** en $(-1, 1)$.
- f és **creixent** en $(1, \sqrt{3})$.
- f és **decreixent** en $(\sqrt{3}, \infty)$.

(Aquesta descripció reflecteix els canvis al voltant de les asímptotes; es pot també agrupar com a "creixent en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ exceptuant -1 i 1 ", i decreixent fora d'aquest interval.)

Extrems locals (on hi ha canvi de signe de f'):

- $x = -\sqrt{3}$: f' passa de negatiu a positiu $\Rightarrow$ **mínim local**.

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{1-3} = \frac{-3\sqrt{3}}{-2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

- $x = 0$: $f'(0) = 0$ però no hi ha canvi de signe (creixent a l'esquerra i a la dreta) $\Rightarrow$ **punt estacionari sense extrem** (punt d'inflexió amb tangent horitzontal).
- $x = \sqrt{3}$: f' passa de positiu a negatiu $\Rightarrow$ **màxim local**.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{1-3} = \frac{3\sqrt{3}}{-2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(Observa la simetria imparella: $f(-\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3})$.)

d) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors. (0,5 punts)

d) Indicacions per a la representació gràfica

Elements clau per dibuixar $y = f(x)$:

- Domini: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Zero i tall en y : $(0, 0)$.
- Asímtotes verticals: $x = -1$ i $x = 1$ (amb comportaments de límit indicats abans).
- Asímtota obliqua: $y = -x$.
- Monotonia: decreixent en $(-\infty, -\sqrt{3})$, creixent en $(-\sqrt{3}, -1)$, creixent en $(-1, 1)$, creixent en $(1, \sqrt{3})$, decreixent en $(\sqrt{3}, \infty)$.
- Extrems locals: mínim a $x = -\sqrt{3}$ amb valor $f(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; màxim a $x = \sqrt{3}$ amb valor $f(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$; punt estacionari a $(0, 0)$ sense extrem.
- Simetria: funció imparella respecte l'origen (rotació de 180°).

Amb aquests punts i rectes com a guia (marcant també el signe dels límits a prop de $x = \pm 1$ i la recta $y = -x$ com a guia per les branques llunyanes) es pot fer un esbós acurat.

