

2. Considereu el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y + mz = -2 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + y + 2z = m \end{array} \right\}$$

a) Discutiu el sistema segons el valor del paràmetre m .

[1,25 punts]

(a) El determinant de la matriu de coeficients del sistema és

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + m - 6 - m^2 - 2 + 6 = -m^2 + 3m - 2,$$

que és 0 quan $m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = 1, 2$. Si m no és ni 1 ni 2, el rang de la matriu de coeficients és 3, per tant el de l'ampliada també, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

En el cas $m = 1$, el rang de la matriu de coeficients és 2 (ja que, per exemple, el menor superior esquerra és no nul) i el de l'ampliada és 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 9 + 2 - 3 + 3 = -8 \neq 0.$$

Per tant, es tracta d'un sistema incompatible. (Alternativament observem que les dues darreres equacions són contradictòries en aquest cas: $x + y + 2z = 3$ i $x + y + 2z = 1$.)

En el cas $m = 2$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també és 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Trobeu la solució del sistema per a $m = 0$.

[0,5 punts]

(b) Si $m = 0$ és un sistema compatible determinat i té per solució

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 + 4 + 18}{0 + 0 - 6 - 0 - 2 + 6} = \frac{22}{-2} = -11,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 0 - 4 - 0 - 0 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 2 - 9 - 0 - 3 - 0}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

c) Per a $m = 2$, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi $x = 5y$.
[0,75 punts]

(c) Per $m = 2$ sabem que el sistema és equivalent a les dues equacions $x - 3y + 2z = -2$, i $y = 1$, i és compatible indeterminat. Imposant, a més a més, la condició extra $x = 5y$, tenim $x = 5$ i, de la primera equació, $2z = -2 - x + 3y = -2 - 5 + 3 = -4$, és a dir, $z = -2$. Així la solució demanada és $(x, y, z) = (5, 1, -2)$.