Problema 3 1 juliol 2025 DANA País Valencià (geometria MAT).

3.1 Donats els plans π_1: $2x - a^2y - az = a - 1$ i π_2: $(a-1)x - ay - z = a$:

3.1.1 **(1,5 punts)** Estudia en funció de a si els plans anteriors coincideixen, són paral·lels no coincidents o es tallen.

3.1.1 Estudi segons a

- **Condició de paral·lelisme**:

  Dos plans són paral·lels si els seus vectors normals són proporcionals:

$$-a = \lambda(-1) \Rightarrow \lambda = a,$$

$$2 = \lambda(a-1) = a(a-1) \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ o } a = -1.$$

  Per $a = 2$ o $a = -1$, la proporcionalitat es compleix ⇒ són paral·lels.

  Comparant termes independents, veiem que no coincideixen.

- **Si $a \neq 2$ i $a \neq -1$**:

  Els vectors normals no són proporcionals ⇒ els plans es tallen en una recta.

Conclusió:

- Paral·lels no coincidents si $a = 2$ o $a = -1$.
- Es tallen en una recta si $a \neq 2, -1$.
- No coincideixen mai per a cap valor real de a.

3.1.2 **(0,5 punts)** Calcula, per a $a = 0$, l'angle entre els plans π_1 i π_2.

3.1.2 Angle per $a = 0$

Per $a = 0$:

$$\pi_1 : \; 2x = -1 \; (\mathbf{n}_1 = (2,0,0)), \quad \pi_2 : \; -x - z = 0 \; (\mathbf{n}_2 = (-1,0,-1)).$$

Angle entre plans = angle entre normals:

$$\cos\theta = \frac{|2\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

3.1.3 **(0,5 punts)** Calcula, per a $a = 0$, la distància entre el punt $P = (1,0,-1)$ i el pla π_1.

3.1.3 Distància de $P = (1, 0, -1)$ a π_1 per $a = 0$

Per $a = 0$, $\pi_1 : 2x = -1 \iff 2x + 1 = 0$, $\mathbf{n} = (2, 0, 0)$:

$$d = \frac{|2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|3|}{2} = \frac{3}{2}.$$