

3.1 Donats els plans $\pi_1: x + 2y + mz = -1$, on m és un paràmetre real, i $\pi_2: x + z = 6$:

3.1.1 (0,5 punts) Calcula el valor de m , si existeix, per al qual π_1 i π_2 són perpendiculars.

Dades:

$\pi_1: x + 2y + mz = -1$ (amb $m \in \mathbb{R}$) i $\pi_2: x + z = 6$.

Els vectors normals són $\mathbf{n}_1 = (1, 2, m)$ i $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$.

3.1.1 (0,5 pts) Perpendicularitat

Dos plans són perpendiculars si i només si els seus normals són ortogonals, és a dir $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + m \cdot 1 = 1 + m.$$

Posant $1 + m = 0$ obtenim $m = -1$.

$m = -1.$

3.1.2 (1,25 punts) Calcula el valor de m per al qual π_1 i π_2 formen un angle de 45 graus.

3.1.2 (1,25 pts) Angle de 45°

L'angle θ entre els plans és l'angle entre els normals; per tant

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

Aquí $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 + m$, $\|\mathbf{n}_1\| = \sqrt{1 + 4 + m^2} = \sqrt{m^2 + 5}$, $\|\mathbf{n}_2\| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$. Per $\theta = 45^\circ$ tenim $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Així

$$\frac{|1 + m|}{\sqrt{m^2 + 5} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Multiplicant: $|1 + m| = \sqrt{m^2 + 5}$. En elevar al quadrat:

$$(1 + m)^2 = m^2 + 5 \implies 1 + 2m + m^2 = m^2 + 5 \implies 2m = 4 \implies m = 2.$$

Comprovació ràpida: per $m = 2$, $\cos \theta = \frac{1 + 2}{\sqrt{4 + 5} \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Correcte.

$$\boxed{m = 2.}$$

3.1.3 (0,75 punts) Determina l'equació paramètrica de la recta intersecció de π_1 i π_2 .

3.1.3 (0,75 pts) Equació paramètrica de la recta d'intersecció $\pi_1 \cap \pi_2$

Resolem el sistema de les dues equacions. Prendrem $z = t$ com a paràmetre.

De π_2 : $x + z = 6 \Rightarrow x = 6 - t$.

Substituïm a π_1 : $x + 2y + mz = -1$:

$$(6 - t) + 2y + mt = -1 \Rightarrow 2y = -7 + t(1 - m).$$

Per tant

$$y = \frac{-7 + (1 - m)t}{2}.$$

Prenent $t \in \mathbb{R}$ com a paràmetre, la recta és

$$(x, y, z) = \left(6, -\frac{7}{2}, 0\right) + t\left(-1, \frac{1-m}{2}, 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Es pot també escriure separadament:

$$x = 6 - t, \quad y = \frac{-7 + (1 - m)t}{2}, \quad z = t.$$

Observació: com el segon component del normal de π_2 és 0 i el de π_1 és 2, els plans no són paral·lels per cap m , així la intersecció sempre és una recta.)