

3.1 Donat el pla $\pi: 2x - z = 1$, determina:

3.1.1 (1,25 punts) Si existeix, el pla perpendicular a π que conté la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$.

3.1.1 Pla perpendicular a π que conté la recta r

Dades de la recta r :

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = y \end{cases}$$

Pas 1: Vector normal del pla π

El pla és $2x - z = 1$, així que el seu **vector normal** és:

$$\vec{n}_{\pi} = (2, 0, -1)$$

Pas 2: Condició de perpendicularitat

El pla que busquem ha de ser **perpendicular a π** , és a dir, el seu **vector normal** ha de ser **paral·lel al vector director de π** .

Recordem:

- Si dos plans són perpendiculars, el vector normal d'un és **orthogonal al vector normal de l'altre**.
- Per tant, el nou pla π' té normal $\vec{n}' = (A, B, C)$ tal que:

$$\vec{n}' \cdot \vec{n}_{\pi} = 0 \implies 2A + 0 \cdot B + (-1) \cdot C = 0 \implies 2A - C = 0 \implies C = 2A$$

Pas 3: Recta r dins del pla π'

Vector director de r :

- De la recta parametritzada:

$$y = 2x \implies x = t, y = 2t, z = y = 2t$$

Vector director:

$$\vec{v}_r = (1, 2, 2)$$

Condicció que la recta estigui dins del pla:

$$\vec{n}' \cdot \vec{v}_r = 0 \implies A * 1 + B * 2 + C * 2 = 0$$

Com que $C = 2A$:

$$A + 2B + 2 * (2A) = A + 2B + 4A = 5A + 2B = 0 \implies B = -\frac{5}{2}A$$

Pas 4: Pla perpendicular amb recta r

- Normal del pla: $\vec{n}' = (A, -5A/2, 2A) = A(1, -5/2, 2)$
- Triem $A = 2$ per evitar fraccions $\rightarrow \vec{n}' = (2, -5, 4)$
- Equació general del pla: $2x - 5y + 4z + D = 0$
- Triem un punt de r , per exemple $t = 0 \implies (0, 0, 0)$:

$$2 * 0 - 5 * 0 + 4 * 0 + D = 0 \implies D = 0$$

✅ Pla:

$$\pi' : 2x - 5y + 4z = 0$$

3.1.2 (1,25 punts) Els plans paral·lels a π la distància dels quals al punt $P = (0,1,2)$ és 2.

3.1.2 Plans paral·lels a π a distància 2 del punt $P = (0, 1, 2)$

Pas 1: Equació general dels plans paral·lels a π

Pla original: $2x - z = 1 \implies 2x + 0 * y - 1 * z - 1 = 0$

Pla paral·lel: $2x + 0 * y - z + D = 0$

Pas 2: Distància punt-plà al pla

Distància d'un punt $P(x_0, y_0, z_0)$ al pla $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Punt: $P = (0, 1, 2)$
- Pla: $2x + 0 * y - 1 * z + D = 0 \rightarrow A = 2, B = 0, C = -1$

$$d = \frac{|2 * 0 + 0 * 1 + (-1) * 2 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + D|}{\sqrt{5}}$$

Volem $d = 2$:

$$\frac{|D - 2|}{\sqrt{5}} = 2 \implies |D - 2| = 2\sqrt{5}$$

$$D - 2 = \pm 2\sqrt{5} \implies D = 2 \pm 2\sqrt{5}$$

Pas 3: Equacions dels plans

$$\begin{cases} 2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0 \implies 2x - z + 2 + 2\sqrt{5} = 0 \\ 2x - z + 2 - 2\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

✅ Dos plans paral·lels a π a distància 2 del punt P .