

3.1 Donada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ i la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcula:

3.1.1 (1 punt) Si existeixen, les coordenades del punt de tall de totes dues rectes.

Donades les rectes:

$r :$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

$s :$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

(Equivalently, parametritzem s per t : $x = -1$, $y = t$, $z = 1 - 2t$.)

3.1.1 Punt de tall (si existeix)

Per trobar la intersecció, imposam x de r igual a -1 :

$$1 + 2\lambda = -1 \implies 2\lambda = -2 \implies \lambda = -1.$$

Amb $\lambda = -1$:

$$x = -1, \quad y = \lambda = -1, \quad z = 2 - (-1) = 3.$$

Per la recta s amb paràmetre t , si $y = t = -1$ tenim $z = 1 - 2(-1) = 3$ i $x = -1$. Per tant el punt coincideix.

Punt d'intersecció:

$(-1, -1, 3)$

3.1.2 (1 punt) L'equació del pla que conté totes dues rectes.

3.1.2 Equació del pla que conté ambdues rectes

Direccions:

$$\vec{v}_r = (2, 1, -1), \quad \vec{v}_s = (0, 1, -2).$$

Un vector normal al pla és el producte vectorial $\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{n} = (2, 1, -1) \times (0, 1, -2) = (-1, 4, 2).$$

Usant el punt de tall $P_0 = (-1, -1, 3)$ i la normal $\vec{n} = (-1, 4, 2)$, l'equació del pla és

$$\vec{n} \cdot (x - P_0) = 0 \implies -1(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0.$$

Simplificant:

$$-x - 1 + 4y + 4 + 2z - 6 = 0 \implies -x + 4y + 2z - 3 = 0.$$

Multiplicant per -1 per donar un aspecte més net:

$$\boxed{x - 4y - 2z + 3 = 0}$$

3.1.3 (0,5 punts) La distància del punt $P = (1,0,2)$ a aquest pla.

3.1.3 Distància del punt $P = (1, 0, 2)$ a aquest pla

Utilitzam la fórmula de la distància d'un punt a un pla $ax + by + cz + d = 0$:

$$\text{dist} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Per al pla $x - 4y - 2z + 3 = 0$ tenim $a = 1$, $b = -4$, $c = -2$, $d = 3$. Avaluem el numerador:

$$1 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 3 = 1 + 0 - 4 + 3 = 0.$$

Per tant la distància és 0: el punt P **pertany** al pla.

Resultat:

$\text{distància} = 0 \quad (\text{P està al pla}).$
--