Problema 3 1 juny 2025 reserva País Valencià (geometria MAT).

3.1 Donats el pla $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$:

3.1.1 **(0,75 punts)** Calcula la distància entre el punt $(3,1,-2)$ i el pla π, en funció del paràmetre real a.

Donats:

$$\pi: \ 2x + ay - z + 3 = 0$$

i la recta r definida per:

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$$

3.1.1 Distància del punt $P = (3, 1, -2)$ al pla π (en funció de a)

El vector normal del pla és $\mathbf{n} = (2, a, -1)$.
La distància d'un punt (x_0, y_0, z_0) al pla $Ax + By + Cz + D = 0$ és

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aplicam-ho a $P = (3, 1, -2)$ amb $A = 2, B = a, C = -1, D = 3$:

$$\text{numerador} = 2 \cdot 3 + a \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 = a + 11,$$

$$\text{denominador} = \sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2} = \sqrt{a^2 + 5}.$$

Per tant:

$$\boxed{d(a) = \frac{|a + 11|}{\sqrt{a^2 + 5}}}$$

3.1.2 **(0,75 punts)** Per a $a = 4$, calcula l'angle que forma la recta r amb el pla π.

3.1.2 Per $a = 4$: angle entre la recta r i el pla π

1. Trobem un vector direcció $\mathbf{v}$ de la recta r. Una manera senzilla és calcular el producte vectorial dels normals de les dues equacions de la recta.
   Normals: $\mathbf{n}_1 = (2, 4, -1)$ i $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, 5)$.
   $$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (21, -9, 6) = 3(7, -3, 2).$$
2. Per $a = 4$, el normal del pla és $\mathbf{n} = (2, 4, -1)$. Cal el producte escalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$:
   $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = (2, 4, -1) \cdot (7, -3, 2) = 14 - 12 - 2 = 0.$$

Com que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, l'angle θ entre la recta i el pla és

$$\boxed{0^\circ}$$

3.1.3 **(1 punt)** Per a $a = 3$, calcula el punt simètric del punt $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecte del pla π.

3.1.3 Per $a = 3$: punt simètric de $Q = \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecte del pla π

Per $a = 3$ el pla és $2x + 3y - z + 3 = 0$ amb $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$. La fórmula tancada per al punt simètric Q' és

$$Q' = Q - 2\frac{Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C).$$

Calculem:

$$Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 2 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot 5 + (-1)(-1) + 3 = 9 + 15 + 1 + 3 = 28,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 4 + 9 + 1 = 14,$$

$$2\frac{28}{14} = 4.$$

Per tant

$$Q' = \left(\tfrac{9}{2}, 5, -1\right) - 4(2, 3, -1) = \left(\tfrac{9}{2} - 8,\ 5 - 12,\ -1 + 4\right) = \left(-\tfrac{7}{2},\ -7,\ 3\right).$$

$$\boxed{Q' = \left(-\tfrac{7}{2},\ -7,\ 3\right)}$$