Problema 3 2 juliol 2025 DANA País Valencià (geometria MAT).

3.2 Donat el pla π: $2x + y - 3 = 0$ i la recta r: $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$:

3.2.1 **(1,25 punts)** Obtín l'equació del pla perpendicular a π i que conté r.

Dades

Pla π : $2x + y - 3 = 0$ amb normal $\mathbf{n}_\pi = (2, 1, 0)$.

Recta r : $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$

Vector direcció de r: $\mathbf{v}_r = (1, -2, 0)$. Un punt de r: $P = (1, -1, 1)$ (prenent $\alpha = 0$).

3.2.1 (1,25 p) Pla perpendicular a π i que conté r

Si un pla és perpendicular a π, el seu vector normal és ortogonal a $\mathbf{n}_\pi$.
Com que el pla ha de contenir r, el vector normal també és ortogonal a $\mathbf{v}_r$.

Podem obtenir el vector normal fent el producte vectorial:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_r \times \mathbf{n}_\pi = (1, -2, 0) \times (2, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Això indica que el pla és del tipus $z = \text{const}$.
Passant per $P = (1, -1, 1)$, resulta:

$$\boxed{z - 1 = 0}.$$

3.2.2 **(1,25 punts)** Calcula, si existeix, un pla paral·lel a π i que continga r.

3.2.2 (1,25 p) Pla paral·lel a π que conté r

Un pla paral·lel a π té el mateix vector normal $(2, 1, 0)$, per tant és de la forma:

$$2x + y + d = 0.$$

Imposem que passi per $P = (1, -1, 1)$ substituint:

$$2(1) + (-1) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -1.$$

El pla buscat és:

$$\boxed{2x + y - 1 = 0}.$$

Resum final:

- **3.2.1:** $z - 1 = 0$
- **3.2.2:** $2x + y - 1 = 0$