

3.2 Donat el pla $\pi: 3x + y - z = 2$ i els punts $P = (0, 1, -1)$ i $Q = (1, a, 1)$, calcula:

3.2.1 (1,25 punts) Els valors del paràmetre a , si existeixen, per als quals la recta que passa per P i Q està continguda en el pla π .

Dades: pla $\pi: 3x + y - z = 2$, $P = (0, 1, -1)$, $Q = (1, a, 1)$. Vector normal del pla $\mathbf{n} = (3, 1, -1)$.

3.2.1 (1,25 pts) Valors de a per als quals la recta PQ està continguda en π

Una recta determinada per dos punts P i Q està continguda en el pla si i només si **tots dos punts** P i Q pertanyen al pla.

Comprovem primer P en π :

$$3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 0 + 1 + 1 = 2,$$

és igual a 2, per tant $P \in \pi$.

Ara imposam que $Q \in \pi$:

$$3 \cdot 1 + a - 1 = 2 + a \stackrel{!}{=} 2 \implies a = 0.$$

Per tant l'únic valor de a que fa que la recta PQ estigui continguda en π és

$$\boxed{a = 0.}$$

(NB: equivalentment, podríem haver comprovat que el vector direcció $\overrightarrow{PQ} = (1, a - 1, 2)$ sigui orthogonal al normal $\mathbf{n}$, però obligar que ambdós punts estiguin al pla ja n'assegura la condició.)

3.2.2 (1,25 punts) Per a $a = 1$, el punt simètric de Q respecte del pla π .

3.2.2 (1,25 pts) Per $a = 1$: punt simètric de Q respecte del pla π

Ara $a = 1$, així $Q = (1, 1, 1)$. Per trobar el punt simètric Q' de Q respecte el pla utilitzarem la fórmula basada en la projecció al llarg del normal.

Si el pla s'escriu $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$ amb $\mathbf{n} = (3, 1, -1)$ i $d = 2$, definim

$$t = \frac{\mathbf{n} \cdot Q - d}{\|\mathbf{n}\|^2}.$$

Calculem:

$$\mathbf{n} \cdot Q = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 3, \quad \|\mathbf{n}\|^2 = 3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 9 + 1 + 1 = 11,$$

$$t = \frac{3 - 2}{11} = \frac{1}{11}.$$

El punt simètric s'obté fent $Q' = Q - 2t\mathbf{n}$. Així

$$Q' = (1, 1, 1) - \frac{2}{11}(3, 1, -1) = \left(1 - \frac{6}{11}, 1 - \frac{2}{11}, 1 + \frac{2}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right).$$

Per tant,

$$Q' = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right).$$