

3.2 Es considera el pla π amb equació $2x + 3y - z = 0$ i els quatre punts $A = (0,0,0)$, $B = (10,0,-20)$, $C = (0,15,-30)$ i $D = (1,2,-1)$.

3.2.1 (0,5 punts) Comprova si el triangle ABC pertany al pla π .

3.2.1 Comprovació si el triangle ABC pertany al pla π

Un punt pertany a un pla si compleix l'equació del pla.

- Punt A: $2 * 0 + 3 * 0 - 0 = 0$ ☒ pertany
- Punt B: $2 * 10 + 3 * 0 - (-20) = 20 + 20 = 40 \neq 0$ ☒ No pertany
- Punt C: $2 * 0 + 3 * 15 - (-30) = 45 + 30 = 75 \neq 0$ ☒ No pertany

☒ **Conclusió:** El triangle ABC no pertany al pla $2x+3y-z=0$.

3.2.2 (0,5 punts) Calcula la distància del punt D al pla π .

3.2.2 Distància del punt D al pla π

Fórmula de la distància d'un punt $D(x_0, y_0, z_0)$ a un pla $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Pla: $2x + 3y - z + 0 = 0 \implies A = 2, B = 3, C = -1, D = 0$
- Punt: $D = (1, 2, -1)$

$$d = \frac{|2 * 1 + 3 * 2 + (-1) * (-1) + 0|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 6 + 1|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

✅ Distància: $d = \frac{9}{\sqrt{14}}$

3.2.3 (1,5 punts) Calcula les coordenades de la projecció del punt D sobre el pla format pels punts A, B i C .

3.2.3 Projecció del punt D sobre el pla format per A, B i C

Pas 1: Vector normal del pla ABC

Donats tres punts A, B, C , el vector normal del pla és:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

- Vectors:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (10, 0, -20), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 15, -30)$$

- Producte vectorial:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & 0 & -20 \\ 0 & 15 & -30 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 * (-30) - (-20) * 15) - \mathbf{j}(10 * (-30) - (-20) * 0) + \mathbf{k}(10 * 15 - 0 * 0)$$

Calcul:

- $i: 0 + 300 = 300$
- $j: -(-300 - 0) = 300$
- $k: 150 - 0 = 150$

$$\vec{n} = (300, 300, 150) \implies \vec{n} = (2, 2, 1) \text{ (dividim per 150 per simplificar)}$$

Pas 2: Equació del pla ABC

Usant el punt $A = (0, 0, 0)$:

$$2(x - 0) + 2(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \implies 2x + 2y + z = 0$$

✅ Equació del pla: $2x + 2y + z = 0$

Pas 3: Projectió de D sobre el pla

Fórmula: projectió de D sobre el pla amb normal $\vec{n}$:

$$D' = D - \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

- $D = (1, 2, -1)$, $\vec{n} = (2, 2, 1)$, $A = (0, 0, 0)$
- Càlcul del producte escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 * 1 + 2 * 2 + 1 * (-1) = 2 + 4 - 1 = 5$
- Norma al quadrat: $\|\vec{n}\|^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9$
- Factor: $5/9$
- Projectió:

$$D' = (1, 2, -1) - \frac{5}{9}(2, 2, 1) = (1, 2, -1) - (10/9, 10/9, 5/9) = (-1/9, 8/9, -14/9)$$

✅ Coordenades de la projectió:

$$D' = \left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right)$$