

3.2 Donats el pla $\pi: 3x - y + 2z = 4$ i el punt $P = (-1, 0, 1)$, obtén:

3.2.1 (1 punt) L'equació del pla perpendicular a π que passa per P i per $Q = (2, 1, 2)$.

Pla donat $\pi: 3x - y + 2z = 4$. Punt $P = (-1, 0, 1)$ i $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.1 Pla perpendicular a π que passa per P i per Q .

Un pla que passa per P i Q conté el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 1, 1)$. Si a més volem que el pla siga perpendicular a π , cal que la normal del nou pla siga perpendicular a la normal de π , $n_\pi = (3, -1, 2)$. Una normal que complisca ambdues condicions és

$$n = \overrightarrow{PQ} \times n_\pi = (3, 1, 1) \times (3, -1, 2) = (3, -3, -6).$$

(Podem simplificar per 3 i usar $n = (1, -1, -2)$.)

L'equació del pla amb normal $n = (1, -1, -2)$ que passa per $P(-1, 0, 1)$ és

$$1(x + 1) - 1(y - 0) - 2(z - 1) = 0,$$

que simplificant dóna

$$x - y - 2z + 3 = 0.$$

Resposta: $x - y - 2z + 3 = 0$.

3.2.2 (0,5 punts) La distància del punt Q al pla π .

3.2.2 Distància del punt $Q = (2, 1, 2)$ al pla π .

Fórmula:

$$\text{dist}(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 1 + 4 - 4|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Resposta: $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

3.2.3 (1 punt) El punt simètric de P respecte al pla π .

3.2.3 Punt simètric de P respecte del pla π .

Si π és $Ax + By + Cz = D$ amb $A = 3, B = -1, C = 2, D = 4$, la reflexió de $P = (x_0, y_0, z_0)$ ve donada per

$$P' = P - 2 \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{A^2 + B^2 + C^2} (A, B, C).$$

Per $P = (-1, 0, 1)$:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D = 3(-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 4 = -3 + 0 + 2 - 4 = -5,$$

i $A^2 + B^2 + C^2 = 9 + 1 + 4 = 14$. Per tant

$$P' = (-1, 0, 1) - 2 \cdot \frac{-5}{14} (3, -1, 2) = (-1, 0, 1) + \frac{10}{14} (3, -1, 2) = (-1, 0, 1) + \frac{5}{7} (3, -1, 2).$$

Calculant coordenades:

$$x' = -1 + \frac{15}{7} = \frac{8}{7}, \quad y' = 0 - \frac{5}{7} = -\frac{5}{7}, \quad z' = 1 + \frac{10}{7} = \frac{17}{7}.$$

Resposta: $P' = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7}\right)$.