Problema 3 2 juny 2025 reserva País Valencià (geometria MAT).

3.2 Donades la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depèn del paràmetre real α, i la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}:$$

3.2.1 **(1,25 punts)** Calcula el valor del paràmetre α per al qual r i s són perpendiculars.

Recta r (paràmetre t):

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha} = t \quad \Longrightarrow \quad r: \ (x, y, z) = (-1, 2, 0) + t(2, 3, \alpha).$$

Direcció de r: $\mathbf{v}_r = (2, 3, \alpha)$. Punt quan $t = 0$: $P_0 = (-1, 2, 0)$.

Recta s donada per les dues equacions de plans:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Normals dels plans: $\mathbf{n}_1 = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -1)$. Direcció de s és

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-1, 1, 1) \times (1, 2, -1) = (-3, 0, -3) = -3(1, 0, 1),$$

per tant podem prendre com a vector direcció $\mathbf{d}_s = (1, 0, 1)$.

3.2.1 (perpendicularitat)

r i s són perpendiculars si $\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s = 0$. Amb $\mathbf{v}_s = (1, 0, 1)$:

$$(2, 3, \alpha) \cdot (1, 0, 1) = 2 + \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\alpha = -2.}$$

3.2.2 **(1,25 punts)** Suposant que $\alpha \neq 0$, obtín la recta paral·lela a s que passe pel punt de r la coordenada z del qual val 0.

3.2.2 (recta paral·lela a s que passa pel punt de r amb $z = 0$, assumint $\alpha \neq 0$)

Si $\alpha \neq 0$, en r la coordenada $z = \alpha t$. Per tenir $z = 0$ cal $t = 0$. Així el punt és $P_0 = (-1, 2, 0)$.

Una recta paral·lela a s té direcció $(1, 0, 1)$. La recta buscada, passant per P_0, és:
forma paramètrica

$$\boxed{\ell: \ (x, y, z) = (-1, 2, 0) + u(1, 0, 1), \ u \in \mathbb{R}}$$

o, de manera explícita,

$$\boxed{x = -1 + u, \quad y = 2, \quad z = u\,.}$$

(Equivalently: $x + 1 = z$ and $y = 2$.)