

Problema 3. Una empresa de manteniment d’automòbils avalua els cotxes fent-los dos controls: si els dos ixen negatius, llavors el cotxe es qualifica com no adequat, i si els dos ixen positius, llavors es qualifica com a adequat. No obstant això, si un dels controls ix positiu i l’altre negatiu, llavors se li fa un tercer control; si aquest ix positiu, la qualificació és de cotxe adequat, i en cas contrari la qualificació és de no adequat. Se sap que una determinada marca passa correctament el primer control amb una probabilitat de 0,8 i que la probabilitat que passe el control disminueix en 0,1 cada vegada que se li fa un control. Seleccionem a l’atzar un cotxe d’aquesta marca per a la seua avaluació.

a) Quina és la probabilitat que el cotxe seleccionat siga qualificat com a adequat?
 (1 punt)

Una empresa avalua els cotxes fent **dos controls inicials**:

- Si els dos controls són negatius → **no adequat**
- Si els dos són positius → **adequat**
- Si un és positiu i l’altre negatiu → es fa un **tercer control**: positiu → adequat, negatiu → no adequat

Dades probabilístiques:

- Probabilitat de passar **el primer control**: $P(C_1^+) = 0.8 \rightarrow P(C_1^-) = 0.2$
- Cada control següent disminueix **0,1** respecte al control anterior:

Control anterior	Prob. de passar següent	Prob. de no passar
$C1^+ = 0.8$	$C2^+ = 0.7$	$C2^- = 0.3$
$C1^- = 0.2$	$C2^+ = 0.7$	$C2^- = 0.3$
$C2^+ = 0.7$	$C3^+ = 0.6$	$C3^- = 0.4$
$C2^- = 0.3$	$C3^+ = 0.2?$	$C3^- = 0.8?$

Important: només fem servir les branques que realment arriben al tercer control. La probabilitat de passar el tercer control és **0,6** en tots dos casos del problema, segons la regla donada.

a) Probabilitat que el cotxe sigui adequat

Fem un arbre de probabilitats amb tots els camins possibles:

1. $C1^+$ i $C2^+$ → adequat

$$P(C1^+ \cap C2^+) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$$

2. $C1^-$ i $C2^-$ → no adequat

$$P(C1^- \cap C2^-) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

3. $C1^+$, $C2^-$ → tercer control $C3^+$ → adequat

$$P(C1^+ \cap C2^- \cap C3^+) = 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = 0.144$$

4. $C1^-$, $C2^+$ → tercer control $C3^+$ → adequat

$$P(C1^- \cap C2^+ \cap C3^+) = 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.084$$

Suma total per adequat:

$$P(\text{adequat}) = 0.56 + 0.144 + 0.084 = 0.788$$

 Resposta a): 0.788

- b) Si se sap que el cotxe seleccionat ha sigut qualificat com a adequat, quina és la probabilitat que haja passat el primer control? *(1 punt)*

b) Probabilitat que hagi passat el primer control si és adequat

Vols $P(C1^+|\text{adequat})$. Per Bayes:

$$P(C1^+|\text{adequat}) = \frac{P(C1^+ \cap \text{adequat})}{P(\text{adequat})}$$

- Numerador: camins amb $C1^+ \rightarrow \text{adequat}$: $0.56 + 0.144 = 0.704$
- Denominador: $P(\text{adequat}) = 0.788$

$$P(C1^+|\text{adequat}) = \frac{0.704}{0.788} \approx 0.893$$

 Resposta b): 0.893

- c) Si se sap que al cotxe seleccionat només se li han fet dos controls, quina és la probabilitat que haja sigut qualificat com a adequat? *(1 punt)*

c) Probabilitat que sigui adequat si només s'han fet dos controls

Només dos controls → casos on els dos controls coincideixen:

- $C1^+ C2^+ \rightarrow \text{adequat} = 0.56$
- $C1^- C2^- \rightarrow \text{no adequat} = 0.06$

Total probabilitat = $0.56 + 0.06 = 0.62$

$$P(\text{adequat} \mid \text{només 2 controls}) = \frac{0.56}{0.62} \approx 0.903$$

 Resposta c): 0.903

Resum final

Apartat	Probabilitat
a) Cotxe adequat	0.788
b) Ha passat primer control si adequat	0.893
c) Adequat si només dos controls	0.903