

Problema 3. Una prova diagnòstica per a detectar l'artritis reumatoide dona positiva en el 96% dels casos quan es té la malaltia, i dona negativa en el 94% dels casos quan no es té la malaltia. Entre els habitants d'un cert poble, se sap que un de cada cent quaranta-cinc té la malaltia sense saber-ho. Es tria a l'atzar un habitant d'aquest poble i se li aplica la prova.

- a) Calcula la probabilitat que l'habitant seleccionat patisca artritis reumatoide i que la prova haja donat negativa. (1 punt)

Definim esdeveniments:

- A : "tenir artritis reumatoide".
- $\overline{A}$: "no tenir artritis reumatoide".
- $+$: prova positiva.
- $-$: prova negativa.

Dades:

- $P(+ | A) = 0.96$ (sensibilitat).
- $P(- | \overline{A}) = 0.94$ (especificitat).
- $P(A) = \frac{1}{145}$.
- Per tant, $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{145} = \frac{144}{145}$.

També:

- $P(- | A) = 1 - 0.96 = 0.04$.
- $P(+ | \overline{A}) = 1 - 0.94 = 0.06$.

a) Probabilitat de patir artritis i prova negativa

Busquem $P(A \cap -)$:

$$P(A \cap -) = P(A) \cdot P(- | A) = \frac{1}{145} \cdot 0.04.$$

Calculem pas a pas:

- $\frac{1}{145} \cdot 0.04 = \frac{0.04}{145}$.
- $0.04 = \frac{4}{100}$, així que:

$$\frac{4}{100 \cdot 145} = \frac{4}{14500} = \frac{2}{7250} \approx 0.00027586.$$

En percentatge:

$$\approx 0.027586\% \text{ (molt poc probable).}$$

- b) Si el resultat de la prova ha donat positiu, quina és la probabilitat que l'habitant seleccionat patisca artritis reumatoide? (1 punt)

b) Probabilitat de patir artritis sabent que la prova és positiva

Busquem $P(A \mid +)$, amb Bayes:

$$P(A \mid +) = \frac{P(A \cap +)}{P(+)}.$$

Primer:

$$P(A \cap +) = P(A) \cdot P(+ \mid A) = \frac{1}{145} \cdot 0.96 = \frac{0.96}{145}.$$

També:

$$P(+ \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(+ \mid \bar{A}) = \frac{144}{145} \cdot 0.06.$$

Per tant:

$$P(+) = \frac{0.96}{145} + \frac{144}{145} \cdot 0.06.$$

Fem denominador comú 145:

$$P(+) = \frac{0.96 + 8.64}{145} = \frac{9.6}{145}.$$

Ara Bayes:

$$P(A \mid +) = \frac{0.96/145}{9.6/145} = \frac{0.96}{9.6} = 0.1.$$

Per tant:

$$P(A \mid +) = 0.1 = 10\%.$$

c) Calcula la probabilitat que el resultat de la prova siga correcte.

(1 punt)

c) Probabilitat que la prova siga correcta

Això vol dir: **positiu i malalt** o **negatiu i sa**:

$$P(\text{correcte}) = P(A \cap +) + P(\bar{A} \cap -).$$

Ja tenim:

$$P(A \cap +) = \frac{0.96}{145}.$$

$$P(\bar{A} \cap -) = P(\bar{A}) \cdot P(- | \bar{A}) = \frac{144}{145} \cdot 0.94 = \frac{135.36}{145}.$$

Suma:

$$P(\text{correcte}) = \frac{0.96 + 135.36}{145} = \frac{136.32}{145}.$$

Calculem:

$$\frac{136.32}{145} \approx 0.94 \quad (94\%).$$

✓ Resum de respostes:

a) $P(A \cap -) \approx 0.000276$ (0,0276%).

b) $P(A \mid +) = 0.10$ (10%).

c) $P(\text{correcte}) \approx 0.94$ (94%).