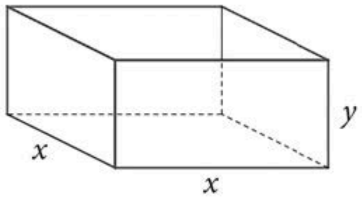
3. L'Ona vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



La capsa ha de tenir un volum de 4 litres.

a) Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).
[0,5 punts]

a) Si el volum ha de ser de 4 litres $= 4000\ cm^3$ tenim que $x^2 \cdot y = 4000$ i, per tant, $y = \frac{4000}{x^2}$.

b) L'Ona vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa?
[2 punts]

b) La superfície de la caixa en cm^2 ve donada per l'expressió

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot y = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$$

Si calculem la derivada, obtenim

$$S'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$$

Trobem els extrems relatius igualant a zero

$$2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 8000 \rightarrow x = 20$$

Comprovem que es tracta d'un mínim perquè la derivada $S'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 20$, i, per tant, $S(x)$ és decreixent, mentre que $S'(x)$ és positiva per a valors superiors a $x = 20$ i, per tant, $S(x)$ és creixent.

Hem obtingut, per tant, que el costat de la base x ha de mesurar 20 cm.
L'alçària de la caixa serà de

$$y = \frac{4000}{x^2} = \frac{4000}{20^2} = 10\ cm.$$

Finalment, la quantitat de cartró és la superfície de la caixa amb aquests valors $S = 20^2 + \frac{16000}{20} = 400 + 800 = 1200\ cm^2$.