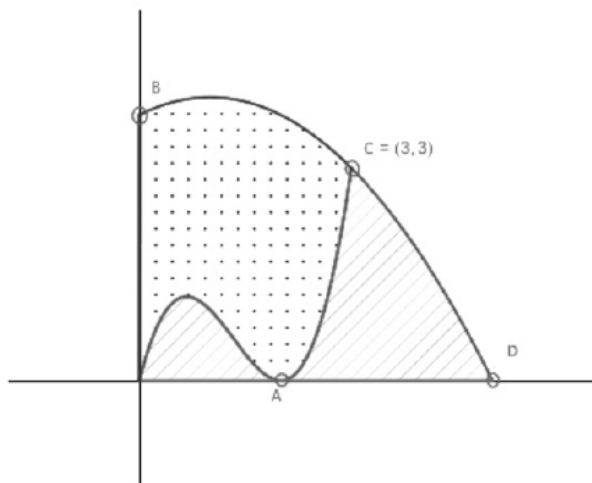


3. La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:



La corba que passa pel punt A és $y=f(x)$, amb $f(x)=x^3-4x^2+4x$, i la que passa pels punts B , $C=(3,3)$ i D és $y=g(x)$, amb $g(x)=-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+4$.

a) Calculeu les coordenades dels punts A , B i D .
[0,75 punts]

(a) El punt A és un punt de tall de $y=f(x)$ amb l'eix OX :

$$x^3-4x^2+4x=0 \rightarrow x(x-2)^2=0 \rightarrow x=0, x=2.$$

Per tant, el punt A té per coordenades $A=(2,0)$. El punt D és un punt de tall de $y=g(x)$ amb l'eix OX :

$$-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+4=0 \rightarrow x^2-2x-15=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(-15)}}{2}=-3, 5.$$

Descartem la solució negativa i podem afirmar, per tant, que el punt D té coordenades $D=(5,0)$. Finalment, el punt B és el punt de tall de $y=g(x)$ amb l'eix OY ; com que

$$g(0)=-\left(\frac{0-1}{2}\right)^2+4=\frac{15}{4},$$

es tracta del punt $B=\left(0,\frac{15}{4}\right)$. Les coordenades del punt C ja ens les dona l'enunciat, $C=(3,f(3))=(3,g(3))=(3,3)$.

b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.

[1,25 punts]

(b) La zona puntejada és l'àrea compresa entre $g(x)$ i $f(x)$ des de $x = 0$ fins a $x = 3$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^3 \left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x) \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} [-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x]_0^3 = 9 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

- c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, de quin color necessitaran més pintura?

[0,5 punts]

- (c) Sabent que l'àrea total del logotip és de $\frac{175}{12} = 14.583 \dots u^2$, la zona ratllada tindrà àrea $14.583 \dots - 9 = 5.583 \dots u^2$. Per tant, per pintar el logotip de la manera que volen, els caldrà més pintura blava que vermella.