

4.1 Donades les funcions $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ i $g(x) = x^2$, obtén:

4.1.1 (1,25 punts) Els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció $y = f(x)$.

4.1.1 Creixement, decreixement i extrems de $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$

Derivada:

$$f'(x) = 4x^3 - 14x = 2x(2x^2 - 7).$$

Punts crítics: $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Segona derivada: $f''(x) = 12x^2 - 14$.

- $f''(0) = -14 < 0 \Rightarrow$ màxim relatiu a $x = 0$.
- $f''(\pm\sqrt{7/2}) = 12 \cdot \frac{7}{2} - 14 = 28 > 0 \Rightarrow$ mínims relatius a $x = \pm\sqrt{7/2}$.

Valors als extrems:

$$f(0) = 16, \quad f(\pm\sqrt{7/2}) = (x^2)^2 - 7x^2 + 16 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 16 = \frac{15}{4}.$$

Monotonia (segon el signe de f'):

- Decreix a $(-\infty, -\sqrt{7/2})$ i $(0, \sqrt{7/2})$.
- Creix a $(-\sqrt{7/2}, 0)$ i $(\sqrt{7/2}, \infty)$.

Extrems relatius:

- Màxim relatiu a $x = 0$ amb $f(0) = 16$.
- Mínims relatius a $x = \pm\sqrt{7/2}$ amb $f = \frac{15}{4}$.

4.1.2 (1,25 punts) L'àrea de la superfície finita tancada entre les corbes donades per $f(x)$ i $g(x)$.

4.1.2 Àrea tancada entre $f(x)$ i $g(x) = x^2$

Interseccions: $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$$x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \implies x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \implies (x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Quina corba va per damunt?

$f(x) - g(x) = x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow f$ és a sobre de g a tot arreu (igualtat només a $x = \pm 2$).

Àrea:

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx.$$

La funció és parella $\Rightarrow$

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_0^2 = 2 \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \boxed{\frac{512}{15}}.$$

Resultats:

- Intervals: decreix $(-\infty, -\sqrt{7/2})$ i $(0, \sqrt{7/2})$; creix $(-\sqrt{7/2}, 0)$ i $(\sqrt{7/2}, \infty)$.
- Extrems: màxim a $x = 0$ amb 16; mínims a $x = \pm\sqrt{7/2}$ amb $\frac{15}{4}$.
- Àrea entre f i g : $\boxed{\frac{512}{15}}$.