

4.1 Donada la funció real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

4.1.1 (0,5 punts) Determina el domini, les asímptotes i els intervals de creixement i decreixement de la funció f .

4.1.1 — Domini, asímptotes i intervals de creixement/decreixement

Domini. El denominador $x^2 + 1 > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant

$$\boxed{\text{dom}(f) = \mathbb{R}.}$$

Asímptotes.

- No hi ha asímptotes verticals (denominador mai zero).
- Per $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$. Així hi ha asímptota horitzontal

$$\boxed{y = 0.}$$

No hi ha asímptotes obliqües.

Derivada i intervals de creixement/decreixement.

Calculem la derivada:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

El signe de f' ve donat per $1 - x^2$:

- $f'(x) > 0$ si $1 - x^2 > 0 \iff |x| < 1$.
- $f'(x) < 0$ si $1 - x^2 < 0 \iff |x| > 1$.
- $f'(x) = 0$ a $x = \pm 1$.

Per tant:

$$\boxed{\text{creix en } (-1, 1), \quad \text{decreix en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty).}$$

Observació: la funció és imparella (odd): $f(-x) = -f(x)$, per tant simetria senar respecte l'origen.

4.1.2 (1,5 punts) Calcula, si existeixen, els valors màxims i mínims relatius i absoluts de la funció f .

4.1.2 — Extrems relatius i absoluts

Punts crítics: $x = -1$, $x = 1$. Avaluem:

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Per canvi de signe de f' : a $x = -1$ la derivada passa de negativa a positiva $\Rightarrow$ **mínim relatiu**; a $x = 1$ passa de positiva a negativa $\Rightarrow$ **màxim relatiu**.

Comparant amb els límits a l'infinit ($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$) tenim:

$$\text{valor límit } 0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Per tant els valors crítics $\pm\frac{1}{2}$ són extrems absoluts també:

Màxim absolut i relatiu: $f(1) = \frac{1}{2}$. Mínim absolut i relatiu: $f(-1) = -\frac{1}{2}$.
--

(No hi ha altres extrems; els límits a $\pm\infty$ són 0, que està entre aquests valors.)

4.1.3 (0,5 punts) Representa la funció f .

4.1.3 — Representació de la funció

Punts i dades clau per a la gràfica:

- Domini: $\mathbb{R}$. Asímtota horitzontal $y = 0$.
- Simetria: funció imparella (simetria respecte l'origen).
- Punts rellevants:
 - $f(0) = 0$ (punt d'inflexió / creua l'eix x).
 - $f(1) = \frac{1}{2}$ (màxim).
 - $f(-1) = -\frac{1}{2}$ (mínim).
 - Comportament: quan $x \rightarrow \infty$ o $-\infty$, la corba s'apropa a 0 per sobre a la dreta i per sota a l'esquerra (segons el signe de x).
- Direcció: creix de -1 a 1 , decreix a banda i banda fora d'aquest interval.
- Vector direcció i pendent a l'origen: $f'(0) = 1$ (pendents 1 a l'origen).

Suggeriment per a dibuixar-la ràpidament:

1. Marca els punts $(-1, -\frac{1}{2})$, $(0, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$.
2. Traça una corba que creix suau entre -1 i 1 , amb màxim a $x = 1$, i que decau asimptòticament cap a $y = 0$ quan $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x > 1$ la corba està per sota de $1/2$ i s'aproxima a 0; per $x < -1$ simètric per simetria senar.

