

4.1 Siga la funció real de variable real $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$.

4.1.1 (0,75 punts) Calcula el domini de definició, les asímptotes i els intervals de creixement i decreixement de la funció f .

4.1.1 Domini, asímptotes i intervals de creixement i decreixement

a) Domini

La funció està definida quan el denominador és diferent de zero:

$$9 - x^2 \neq 0 \implies x^2 \neq 9 \implies x \neq 3, x \neq -3$$

✅ Domini:

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

b) Asímtotes

Verticals: on el denominador = 0:

$$x = 3, \quad x = -3$$

Horizontals / obliques: com $x \rightarrow \pm\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} = \frac{x}{-x^2+9} = \frac{x}{-x^2(1-9/x^2)} = \frac{-1}{x(1-9/x^2)} \rightarrow 0$$

✅ Asímtota horitzontal:

$$y = 0$$

c) Derivada per intervals de creixement i decreixement

$$f'(x) = \frac{(9-x^2) * 1 - x * (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{9-x^2+2x^2}{(9-x^2)^2} = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2}$$

- Numerador: $9 + x^2 > 0$ sempre
- Denominador: $(9 - x^2)^2 > 0$ sempre (excepte $x = \pm 3$, que no està al domini)

✅ Conclusió: $f'(x) > 0$ per tot el domini.

- **Interval de creixement:** tot el domini:

$$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

- **Interval de decreixement:** cap.

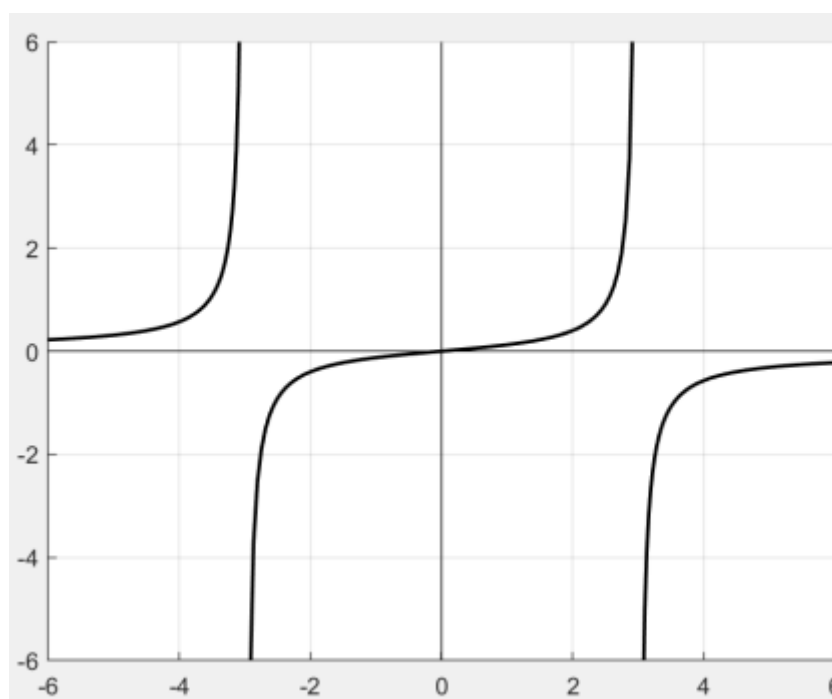
4.1.2 (0,25 punts) Dibuixa la corba $y = f(x)$.

4.1.2 Representació gràfica

- Asímtotes verticals: $x = -3, x = 3$
- Asímtota horitzontal: $y = 0$
- La funció creix a tot el domini i canvia de signe amb x :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{8} > 0, \quad f(-1) = \frac{-1}{8} < 0$$

✓ La corba és **monotònicament creixent** amb dues discontinuïtats verticals.



4.1.3 (0,75 punts) Calcula totes les primitives de f .

4.1.3 Primitives

$$\int \frac{x}{9 - x^2} dx$$

Fórmula clàssica: $\int \frac{x}{a - x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln |a - x^2| + C$

$$\boxed{\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln |9 - x^2| + C}$$

4.1.4 (0,75 punts) Calcula l'àrea compresa entre les corbes $y = f(x)$, $x = -1$, $x = 1$ i l'eix d'abscisses.

4.1.4 Àrea entre corbes $y=f(x)$, $x=-1$, $x=1$ i l'eix x

$$A = \int_{-1}^1 \left| \frac{x}{9-x^2} \right| dx$$

- Funció **impar**: $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ simetria respecte l'origen
- Àrea: $A = 2 \int_0^1 \frac{x}{9-x^2} dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{9-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln |9-x^2| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \ln(9-1) + \frac{1}{2} \ln(9-0) = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}$$

Multiplicant per 2 (simetria):

$$A = 2 * \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8} = \ln \frac{9}{8}$$

✅ Àrea exacta:

$$A = \ln \frac{9}{8}$$