

4.1 Una empresa de paqueteria vol dissenyar diferents models de caixes. Un d'aquests models consisteix en una caixa de 80 cm^3 de volum, amb base i tapa quadrades. El preu del material de les parets laterals és d'1 cèntim per cm^2 . La base i la tapa es construiran amb un material de qualitat superior a les cares laterals de la caixa i que és un 25% més car.

Obtén:

4.1.1 (0,75 punts) La funció $P(x)$ que proporciona el preu del material de la caixa en funció del costat de la base x .

Volum fix $V = 80 \text{ cm}^3$. Base i tapa quadrades de costat $x > 0$. Altura h complex

$$x^2 h = 80 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{80}{x^2}.$$

Preus per cm^2 :

- cares laterals: 0,01 € (1 cèntim).
- base i tapa: 25% més cares $\Rightarrow 0,01 \cdot 1,25 = 0,0125$ €.

Àrees:

- total cares laterals = $4xh$.
- base + tapa = $2x^2$.

4.1.1 Funció del preu $P(x)$

$$P(x) = 0,01 \cdot (4xh) + 0,0125 \cdot (2x^2).$$

Substituint $h = 80/x^2$:

$$P(x) = 0,01 \cdot \frac{320}{x} + 0,025x^2 = \frac{3,2}{x} + 0,025x^2, \quad x > 0.$$

4.1.2 (1,25 punts) Les dimensions de la caixa perquè la funció $P(x)$ tinga el menor valor possible.

4.1.2 Dimensions que minimitzen $P(x)$

Derivada:

$$P'(x) = -\frac{3,2}{x^2} + 0,05x.$$

Posant $P'(x) = 0$:

$$0,05x = \frac{3,2}{x^2} \Rightarrow 0,05x^3 = 3,2 \Rightarrow x^3 = \frac{3,2}{0,05} = 64.$$

Per tant $x = \sqrt[3]{64} = 4$ cm.

Comprovem que és mínim: $P''(x) = \frac{6,4}{x^3} + 0,05 > 0$ per a $x > 0$, llavors mínim local (i per la forma de la funció, mínim global en $x > 0$).

Altura:

$$h = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{16} = 5 \text{ cm.}$$

Les dimensions òptimes són: costat de la base $x = 4$ cm i altura $h = 5$ cm.

4.1.3 (0,5 punts) El preu del material en el cas anterior.

4.1.3 Preu en aquest cas

$$P(4) = \frac{3,2}{4} + 0,025 \cdot 4^2 = 0,8 + 0,025 \cdot 16 = 0,8 + 0,4 = 1,20 \text{ €}.$$

Resum final:

- $P(x) = \frac{3,2}{x} + 0,025x^2$ (euros), $x > 0$.
- Dimensions que minimitzen el cost: base $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$, altura 5 cm .
- Preu mínim del material: **1,20 €**.