

4.1 Es considera un prisma triangular d'altura h cm que té com a base un triangle equilàter de costat x cm. El prisma té una àrea total (àrea que inclou l'àrea de les cares laterals i de les bases superior i inferior) igual a 10 cm^2 .

4.1.1 **(0,5 punts)** Expressa l'àrea total del prisma en funció de x i h .

Dades: prisma triangular d'altura h (cm) amb base un triangle equilàter de costat x (cm). Àrea total (bases + cares laterals) = 10 cm^2 .

Recordator: àrea d'un triangle equilàter de costat x és $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Perímetre de la base = $3x$.

4.1.1 Expressar l'àrea total en funció de x i h

Àrea de les dues bases:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

Àrea de les cares laterals (3 rectangles de costat x i altura h):

$$3x \cdot h.$$

Per tant l'àrea total $A(x, h)$ és

$$A(x, h) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3xh.$$

I fem la restricció

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3xh = 10.$$

4.1.2 (1,5 punts) Obtén els valors de x i h que maximitzen el volum.

4.1.2 Trobar x i h que maximitzen el volum

Volum del prisma:

$$V(x, h) = (\text{àrea base}) \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 h.$$

Usam la restricció per eliminar h . De la restricció:

$$h = \frac{10 - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2}{3x}.$$

Substituïm a V :

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \cdot \frac{10 - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{12} x \left(10 - \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \right).$$

Simplificant:

$$V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} x - \frac{1}{8} x^3, \quad x > 0,$$

funció d'una sola variable.

Derivada:

$$V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8} x^2.$$

Posant $V'(x) = 0$:

$$\frac{3}{8} x^2 = \frac{5\sqrt{3}}{6} \implies x^2 = \frac{20\sqrt{3}}{9}.$$

Per tant

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}} \quad (\text{escollim la arrel positiva}).$$

Calcular h amb la restricció (més simple si substituïm x^2):

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{9} = \frac{20 \cdot 3}{18} = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Així } 10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}, \text{ i}$$

$$h = \frac{20/3}{3x} = \frac{20}{9x}.$$

Substituint l'expressió de x si es vol, però és suficient la forma

$$\boxed{h = \frac{20}{9x}}$$

i amb l'expressió de x prèvia s'obté h explícit.

Calcul numèric (aprox.):

$$x \approx 1,963 \text{ cm}, \quad h \approx 1,132 \text{ cm}.$$

4.1.3 (0,5 punts) Calcula aquest volum.

4.1.3 Volum maximal

Una fórmula útil trobada abans: en el punt crític

$$V_{\max} = \frac{5\sqrt{3}}{9} x.$$

Substituint $x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}$ s'obté una forma exacta; numèricament:

$V_{\max} \approx 1,888 \text{ cm}^3.$
--

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}, \quad h = \frac{20}{9x} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x}, \quad V_{\max} = \frac{5\sqrt{3}}{9}x = \frac{10\sqrt{3}}{27}\sqrt{5\sqrt{3}}.$$