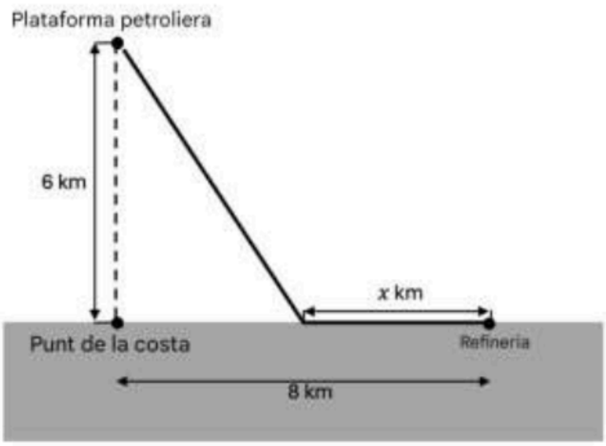
Problema 4 2 juliol 2025 DANA País Valencià (anàlisi MAT).

4.2 Una costa marítima s'estén en línia recta cap a la dreta des d'un punt P de la costa. A 8 km de P hi ha una refineria situada a la costa. A més, hi ha una plataforma petroliera a la mar que està situada a 6 km de distància de P en la recta perpendicular a la costa des del punt P. Es construirà un oleoducte des de la plataforma fins a la refineria. El cost de construir l'oleoducte davall de l'aigua és d'1 milió d'euros per quilòmetre i el de construir-lo sobre terra, de 0,6 milions d'euros per quilòmetre.



4.2.1 **(0,5 punts)** Determina la funció del cost de construcció de l'oleoducte dependent de la distància, x, entre el primer punt on l'oleoducte toca a la costa i la refineria.

Dades i variables

- Punt P a la costa; la refineria és a 8 km a la dreta de P.
- Plataforma a 6 km mar endins en la perpendicular per P.
- El tub toca la costa en un punt entre P i la refineria.
  Siga x la distància **sobre terra** des d'eixe punt fins a la refineria $\Rightarrow$ la distància horitzontal des de P fins al punt d'aterratge és $8 - x$.
- Costos: sota l'aigua 1 M€/km; sobre terra $0{,}6$ M€/km.

La longitud submarina és l'hipotenusa del triangle $(8 - x,\ 6)$:

$$L_{\text{aigua}} = \sqrt{(8-x)^2 + 6^2} = \sqrt{(8-x)^2 + 36}.$$

La longitud sobre terra és x. Domini: $0 \le x \le 8$.

4.2.1 Funció de cost

$$\boxed{C(x) = \sqrt{(8-x)^2 + 36} + 0{,}6 \cdot x} \quad (\text{M€}), \qquad 0 \le x \le 8.$$

4.2.2 **(1,5 punts)** Calcula el valor de x perquè el cost de construcció de l'oleoducte siga mínim.

4.2.2 Valor de x que minimitza el cost

Derivem i igualem a zero:

$$C'(x) = \frac{-(8-x)}{\sqrt{(8-x)^2+36}} + 0{,}6 = 0 \implies \frac{8-x}{\sqrt{(8-x)^2+36}} = 0{,}6.$$

Posem $y = 8 - x \geq 0$:

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+36}} = 0{,}6 \implies y^2 = 0{,}36(y^2+36) \implies 0{,}64\,y^2 = 12{,}96 \implies y^2 = 20{,}25 \Rightarrow y = 4{,}5.$$

Així,

$$\boxed{x = 8 - y = 3{,}5\ \mathrm{km}}.$$

(Verificació d'extrems: $C(0) = 10$, $C(8) = 10{,}8$; el mínim interior és coherent.)

4.2.3 **(0,5 punts)** Calcula aquest cost.

4.2.3 Cost mínim

$$L_{\text{aigua}} = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5 \text{ km}.$$

$$C_{\text{min}} = 1 \cdot 7{,}5 + 0{,}6 \cdot 3{,}5 = 7{,}5 + 2{,}1 = \boxed{9{,}6 \text{ M€}}.$$

Resum:

- $C(x) = \sqrt{(8-x)^2 + 36} + 0{,}6 \cdot x$ (M€), $0 \leq x \leq 8$.
- $x_{\min} = 3{,}5$ km.
- Cost mínim $9{,}6$ milions d'euros.