

4.2 Donades les funcions reals de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i $g(x) = 8x$:

4.2.1 (0,5 punts) Determina el domini, les asímptotes i els intervals de creixement i decreixement de la funció f .

4.2.1 — Domini, asímptotes i intervals de creixement/decreixement de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Domini. El denominador no pot ser zero, per tant

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Asímptotes.

- Vertical: $x = 0$ és asímptota vertical, perquè $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = +\infty$.
- Horitzontals: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Per tant asímptota horitzontal $y = 0$.

No hi ha asímptotes obliqües.

Derivada i monotonia.

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}.$$

- Per $x > 0$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ **decreix** en $(0, \infty)$.
- Per $x < 0$: $x^3 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ **creix** en $(-\infty, 0)$.

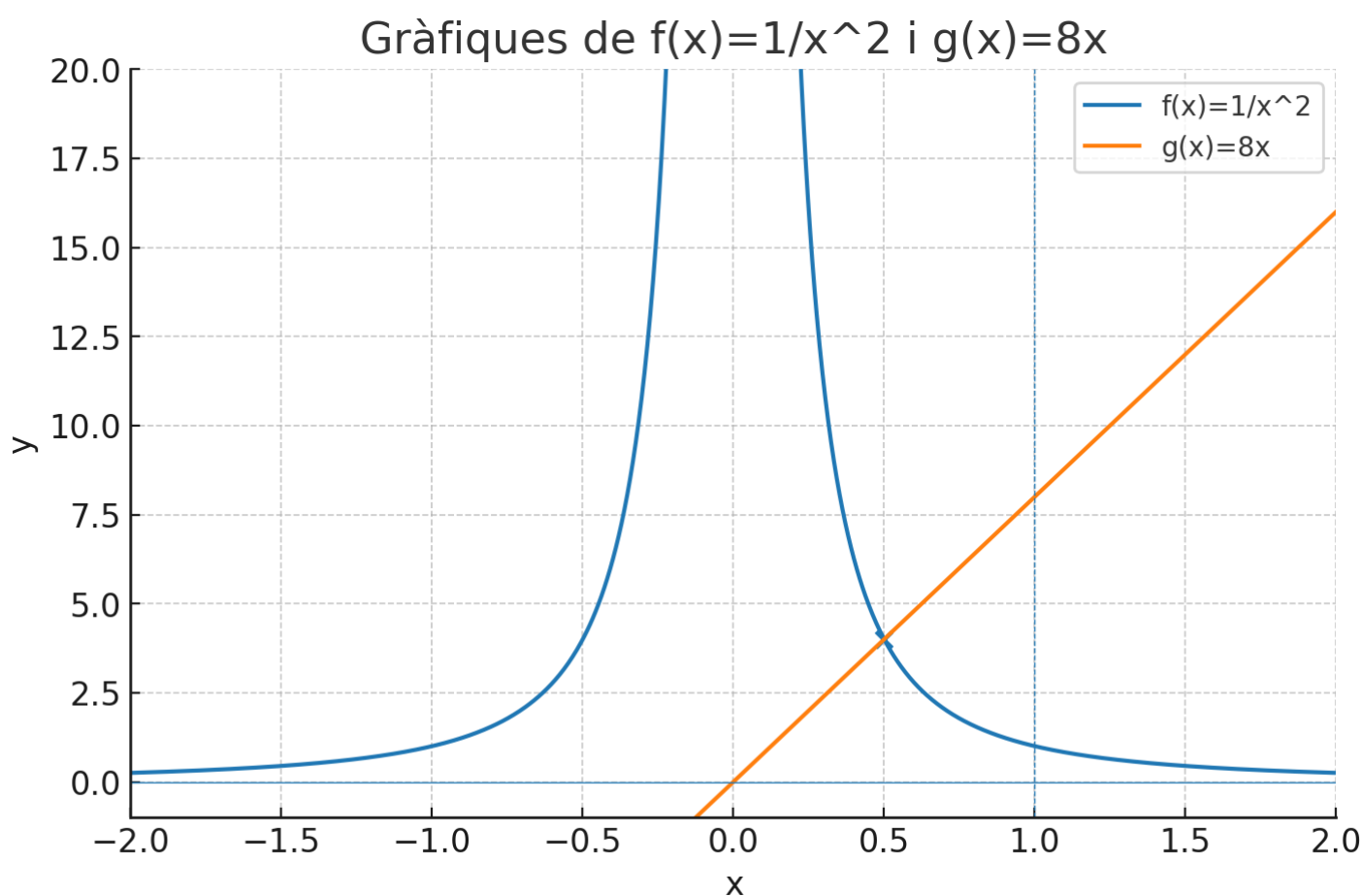
(No hi ha punts crítics a la funció sobre el domini; té un mínim "relatiu" en sentit de ramat a la discontinuïtat a 0, però no dins del domini.)

4.2.2 (0,25 punts) Dibuixa les gràfiques d'ambdues funcions.

4.2.2 — Gràfiques d'ambdues funcions

en la figura apareixen $f(x) = 1/x^2$ i $g(x) = 8x$, l'eix d'abscisses i la recta $x = 1$.

(La gràfica està mostrada a continuació — mira-la per comprovacions visuals: s'hi veu la simetria de f , l'asimptota vertical a $x = 0$, i la recta creixent g .)



4.2.3 (1,75 punts) Calcula l'àrea del recinte delimitat per l'eix d'abscisses, la recta $x = 1$ i les gràfiques de les dues funcions $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

4.2.3 — Àrea del recinte delimitat per l'eix d'abscisses, la recta $x = 1$ i les gràfiques de $y = f(x)$ i $y = g(x)$

Primer trobem les interseccions rellevants entre f i g per $x > 0$:

$$\frac{1}{x^2} = 8x \implies 1 = 8x^3 \implies x^3 = \frac{1}{8} \implies x = \frac{1}{2}.$$

A $x = \frac{1}{2}$ ambdós valors són $y = 4$.

Ara descrivim el recinte: la corba g talla l'eix d'abscisses a l'origen $(0, 0)$. Les dues corbes es tallen a $x = \frac{1}{2}$. Per a t entre 0 i 1, la "coberta superior" de la regió és:

- per $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ la funció superior respecte l'eix és $g(x) = 8x$,
- per $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ la funció superior (entre les dues) que forma la frontera del recinte és $f(x) = 1/x^2$ a partir del punt d'intersecció fins a $x = 1$.

La base inferior del recinte és l'eix $y = 0$, i el tancament dret s'aconsegueix amb $x = 1$. D'aquí que l'àrea sol·licitada sigui la suma de les àrees sota cada corba respecte l'eix x en els intervals indicats:

$$\text{Àrea} = \int_0^{1/2} g(x) dx + \int_{1/2}^1 f(x) dx.$$

Calculem cada integral:

$$\int_0^{1/2} 8x dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1/2} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{1/2}^1 = (-1) - (-2) = 1.$$

Per tant l'àrea total és

$\text{Àrea} = 1 + 1 = 2.$
