Problema 4 2 juny 2025 País Valencià (anàlisi MAT).

4.2 Donada la funció real de variable real

$$f(x) = x|x-2|.$$

4.2.1 **(1 punt)** Representa la regió compresa entre la gràfica de la funció f, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = -1$ i $x = 5$.

Donada

$$f(x) = x|x-2|$$

És convenient descompondre segons $x < 2$ i $x \geq 2$:

- Per $x < 2$: $|x-2| = 2-x$ i $f(x) = x(2-x) = 2x - x^2$.
- Per $x \geq 2$: $|x-2| = x-2$ i $f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$.

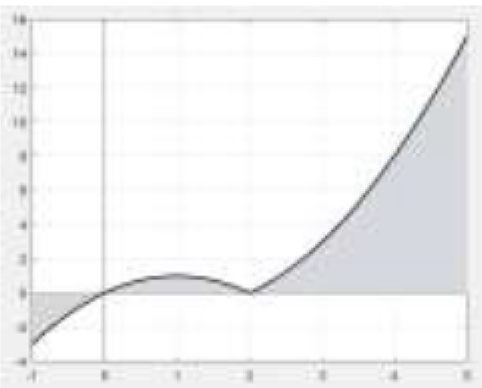
Punts importants en $[-1, 5]$: zeros a $x = 0$ i $x = 2$. Avaluacions:

$$f(-1) = -1 \cdot 3 = -3, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 0, \quad f(5) = 5 \cdot 3 = 15.$$

4.2.1 Representació de la regió entre la gràfica, l'eix OX i les rectes $x = -1$ i $x = 5$

La regió està tallada pels verticals $x = -1$ i $x = 5$ i per la corba $y = f(x)$. Sobre $[-1, 0]$ la funció és negativa (la corba queda sota l'eix OX): cal traçar la parabola $y = 2x - x^2$ entre $x = -1$ i $x = 0$. Sobre $[0, 2]$ la mateixa parabola $y = 2x - x^2$ però ara està per sobre de l'eix (de 0 a 1 té màxim $f(1) = 1$ i torna a zero a $x = 2$). Sobre $[2, 5]$ la branca és la parabola $y = x^2 - 2x$ (positiva i creixent en aquest interval).

Per fer l'esbós: marca els punts $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(5, 15)$; dibuixa la branca esquerra $2x - x^2$ entre -1 i 2 i la branca dreta $x^2 - 2x$ entre 2 i 5; omple la regió entre la corba i l'eix OX.



4.2.2 **(1,5 punts)** Calcula l'àrea de la regió anterior.

4.2.2 Càlcul de l'àrea de la regió

L'àrea demanada és l'integral de la distància vertical entre la corba i l'eix, és a dir

$$\text{Area} = \int_{-1}^{5} |f(x)|\,dx.$$

Com que $f(x) < 0$ en $[-1, 0)$ i $f(x) \geq 0$ en $[0, 5]$, es pot fer per parts:

$$\text{Area} = \int_{-1}^{0} -f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx.$$

Usant les fórmules de cadascun tram:

Per $-1 \leq x \leq 2$: $f(x) = 2x - x^2$.
Per $2 \leq x \leq 5$: $f(x) = x^2 - 2x$.

Càlculs:

$$\int_{-1}^{0} -f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \tfrac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{2}^{5} f(x)\,dx = \int_{2}^{5} (x^2 - 2x)\,dx = \left[\tfrac{x^3}{3} - x^2\right]_{2}^{5} = \frac{125}{3} - 25 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{50}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = 18.$$

Sumant:

$$\text{Area} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{8}{3} + 18 = \frac{62}{3} \approx 20{,}6667.$$

Resposta final:

- La regió està delimitada per la corba $y = x|x-2|$, l'eix OX i les verticals $x = -1$, $x = 5$; la corba es descriu per $y = 2x - x^2$ a $[-1, 2)$ i per $y = x^2 - 2x$ a $[2, 5]$.
- L'àrea de la regió és $\boxed{\dfrac{62}{3}}$ (aprox. $20{,}6667$).