

4.2 Donada la funció real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$,

4.2.1 (0,5 punts) Determina el domini de definició i les asímptotes de f .

4.2.1 Domini i asímptotes

- **Domini:** el denominador no pot ser zero, per tant

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- **Asímtota vertical:** $x = 1$.

Com $x \rightarrow 1^\pm$ té $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$ i per tant $4/(x-1)^2 \rightarrow +\infty$, així que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

- **Asímtota obliqua:** per $x \rightarrow \pm\infty$,

$$f(x) = x + \frac{4}{(x-1)^2} \implies f(x) - x = \frac{4}{(x-1)^2} \rightarrow 0,$$

per tant l'asímtota és la recta

$$\boxed{y = x.}$$

(No hi ha asímtota horitzontal.)

4.2.2 (0,75 punts) Indica, si existeixen, els extrems, i els intervals de creixement i decreixement de f .

4.2.2 Extrems i intervals de creixement/decreixement

Calculem la derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4(x-1)^{-2}) + 1 = -8(x-1)^{-3} + 1 = 1 - \frac{8}{(x-1)^3}.$$

- Punts crítics: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{8}{(x-1)^3} \Leftrightarrow (x-1)^3 = 8 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$. També f' no està definida a $x = 1$ (fora del domini).
- Signe de f' :
 - Per $x < 1$: $(x-1)^3 < 0 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} < 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - (\text{negatiu}) > 0$. Així f és **creixent** en $(-\infty, 1)$.
 - Per $1 < x < 3$: $(x-1)^3 \in (0, 8) \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$. Així f és **decreixent** en $(1, 3)$.
 - Per $x > 3$: $(x-1)^3 > 8 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$. Així f és **creixent** en $(3, \infty)$.
- Segon derivada per classificar:

$$f''(x) = \frac{24}{(x-1)^4} > 0 \quad \text{per a tot } x \neq 1,$$

per tant la funció és **cònvexa** a tots els intervals del domini i el punt $x = 3$ és un **mínim local** (i com és l'únic extrem, és mínim global sobre cada component del domini).

- Valor en $x = 3$:

$$f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = \frac{4}{4} + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Conclusió sobre extrems i monotonia:

- f creix en $(-\infty, 1)$, decreix en $(1, 3)$, i creix en $(3, \infty)$.
- Hi ha un **mínim local** a $x = 3$ amb $f(3) = 4$. No hi ha màximos locals.

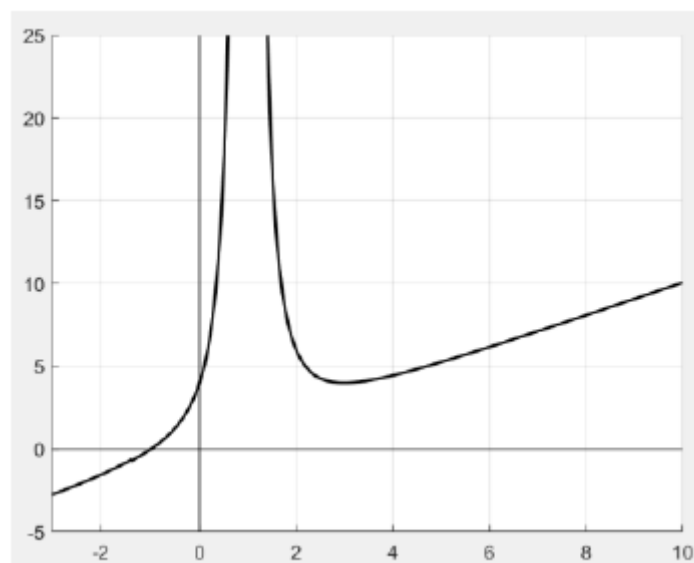
4.2.3 (0,5 punts) Representa gràficament la funció $y = f(x)$.

4.2.3 Descripció per representar la gràfica $y = f(x)$

Punts i característiques útils per al dibuix:

- Domini: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (asíntota vertical $x = 1$, amb tendència $+\infty$ per ambdós costats).
- Asíntota obliqua: $y = x$. La corba s'aproxima a la recta $y = x$ per a $x \rightarrow \pm\infty$ (per sobre, perquè $4/(x-1)^2 > 0$, així $f(x) > x$ sempre).
- No té zeros reals (ja que $4/(x-1)^2 > 0$ i x pot ser negatiu però la suma no arriba a 0 per valors reals — de fet per $x \geq 0$ és clar positiva; per $x < 0$ l'addend x negatiu és dominat per la fracció positiva petita? més fàcil: $4/(...) > 0 \Rightarrow f(x) > x$; si $x \leq 0$ then $f(x) > x \geq \dots$ anyway no creua l'eix OX).
(Comprovació: $f(0) = 4 > 0$.)
- Valors notables: $f(0) = 4$, $f(3) = 4$.
- Asimptòtica: per valors grans, la corba segueix línia $y = x$ una mica per sobre; la separació decau com $O(1/x^2)$.
- Tall amb eix Y: $(0, 4)$.
- Comportament a prop de 1: s'enfila cap a $+\infty$ per ambdós costats.

Amb aquests elements pots esbossar la corba: dues branques separades pel tall vertical $x = 1$, amb mànega creixent a l'esquerra, comportament $\rightarrow +\infty$ quan s'acosta a 1 per l'esquerra, a la dreta davalla des de $+\infty$ fins al mínim (3,4) i després torna a créixer i s'acosta a la recta $y = x$.



4.2.4 (0,75 punts) Calcula la integral indefinida $\int f(x)dx$.

4.2.4 Integral indefinida

Calcular

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) dx = \int 4(x-1)^{-2} dx + \int x dx.$$

$$\int 4(x-1)^{-2} dx = 4 \cdot \left(- (x-1)^{-1} \right) = -\frac{4}{x-1},$$

i

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Per tant

$$\boxed{\int f(x) dx = -\frac{4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$