

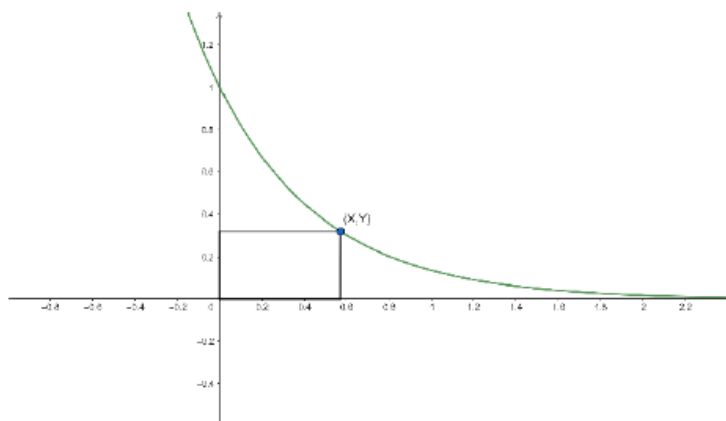
5. Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ i (x, y) .

a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té $x = \frac{1}{2}$ és el d'àrea màxima.

Quin és el valor d'aquesta àrea?

[1,5 punts]

(a) La gràfica de la funció $y = e^{-2x}$ està esbossada en el dibuix següent, juntament amb un dels rectangles descrits a l'enunciat:



Com que un qualsevol d'aquests rectangles mesura x de base i e^{-2x} d'alçada, la seva àrea és $A(x) = xe^{-2x}$. Busquem els extrems relatius d'aquesta funció:

$$A'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1 - 2x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

A partir del signe de la funció derivada es veu clarament que $A(x)$ és creixent per a $x < \frac{1}{2}$ i decreixent per a $x > \frac{1}{2}$. Per tant, el punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim absolut de $A(x)$. Així,

el rectangle d'àrea màxima correspon al de costats $x = \frac{1}{2}$ i $y = e^{-2 \cdot (\frac{1}{2})} = \frac{1}{e}$, i té àrea

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e} u^2.$$

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.

[1 punt]

(b) La derivada d'aquesta funció és $y' = -2e^{-2x}$. El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 0 és $y'(0) = -2e^0 = -2$. Com que $y(0) = e^0 = 1$, la recta tangent serà la d'equació $y - 1 = -2(x - 0)$, és a dir, $y = -2x + 1$. El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses és $x = \frac{1}{2}$, és a dir, el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.