

6. Considereu el punt $P = (1, 3, 0)$ i el pla π d'equació $x + 2y - 2z = -7$.

a) Sigui r la recta que és perpendicular a π i passa per P . Calculeu el punt d'intersecció de π amb r .

[1 punt]

(a) Per ser perpendicular a π , la recta r tindrà com a vector director $\vec{v} = (1, 2, -2)$. I, com que ha de passar per $P = (1, 3, 0)$, es tracta de la recta $(x, y, z) = (1, 3, 0) + \lambda(1, 2, -2) = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, -2\lambda)$. Imposant l'equació del pla π , obtenim

$$1 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7,$$

$$9\lambda + 7 = -7,$$

és a dir, $\lambda = -\frac{14}{9}$. Això correspon al punt $Q = \left(1 - \frac{14}{9}, 3 - \frac{28}{9}, \frac{28}{9}\right) = \left(\frac{-5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{28}{9}\right)$.

b) Calculeu la distància d del punt P al pla π .

[0,5 punts]

(b) Com que el punt Q que hem calculat és la projecció ortogonal de P sobre el pla π , la distància demanada és

$$\begin{aligned}d(P, \pi) &= d(P, Q) = \\&= \sqrt{\left(\frac{-5}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{28}{9} - 0\right)^2} = \frac{1}{9} \sqrt{14^2 + 28^2 + 28^2} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

Alternativament, la podem calcular amb la fórmula de la distància punt-pla:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3}.$$

- c) Calculeu l'equació d'un altre pla π' que sigui paral·lel a π i que també estigui a distància d de P .

[1 punt]

- (c) Per ser paral·lel, π' haurà de tenir equació de la forma $x + 2y - 2z = D$. I imposant que la distància a $P = (1,3,0)$ també sigui de $\frac{14}{3}$ obtenim

$$\frac{14}{3} = d(P, \pi') = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|7 - D|}{3},$$

és a dir, $|7 - D| = 14$, $7 - D = \pm 14$, $D = 7 \mp 14 = \begin{Bmatrix} -7 \\ 21 \end{Bmatrix}$. El valor $D = -7$ correspon al pla π que ja coneixem, i l'altre pla π' demanat serà el d'equació $x + 2y - 2z = 21$.