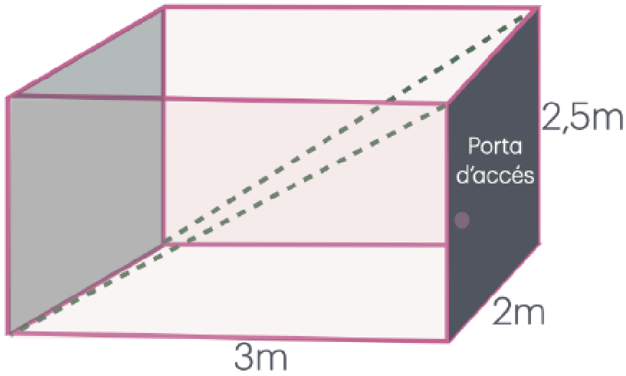
Problema A1 model 1 juliol 2025 Illes Balears (geometria MAT).

Problema A1. — Una empresa de transport marítim ha dissenyat un nou contenidor metàl·lic en forma de prisma rectangular tal com es mostra a la figura. El contenidor dissenyat té una base de dimensions 3 metres per 2 metres i una alçària de 2.5 metres. A l'interior del contenidor es col·loquen un total de dues bigues per reforçar l'estructura, les quals es col·loquen sobre la diagonal de cada una de les cares de dimensió 3×2.5 metres, tal com es mostra a la figura (segments discontinus).



(a) [**1 punt**] Escull un vèrtex del prisma regular i sobre ell determina un sistema de referència cartesià, el qual tindrà com a origen aquest vèrtex. Indica, amb aquest sistema de referència, quines són les coordenades de cadascun dels diferents vèrtexs del prisma rectangular.

(a) Coordenades dels vèrtexs

Posem l'origen $(0,0,0)$ al vèrtex inferior davanter esquerre.

- L'eix x mesura la profunditat (0 a 3).
- L'eix y mesura l'amplada (0 a 2).
- L'eix z mesura l'alçada (0 a $2{,}5$).

Els vèrtexs són:

- Base inferior $(z = 0)$:
  $(0,0,0),\ (3,0,0),\ (0,2,0),\ (3,2,0).$
- Base superior $(z = 2{,}5)$:
  $(0,0,2{,}5),\ (3,0,2{,}5),\ (0,2,2{,}5),\ (3,2,2{,}5).$

(b) **[1 punt]** Calcula la longitud de les dues bigues i calcula l'equació del pla que les conté. Justifica el procés.

(b) Longitud de les bigues i equació del pla que les conté

Les bigues són les diagonals de les cares laterals de $3 \times 2{,}5$.

Exemple: de $(0, 0, 0)$ a $(3, 0, 2{,}5)$.

Longitud:

$$\ell = \sqrt{3^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{9 + 6{,}25} = \sqrt{15{,}25} = \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3{,}905\,\mathrm{m}.$$

Pla que conté aquestes diagonals:

Vector direcció diagonal: $(3, 0, 2{,}5)$.

Vector entre cares: $(0, 2, 0)$.

Producte vectorial: $(-5, 0, 6)$.

Equació:

$$-5x + 6z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{5}{6}x.$$

(c) [**0.5 punts**] Una de les dues cares de dimensió 2×2.5 metres constitueix la porta del contenidor tal com es mostra a la figura. Podríem introduir-hi una làmina de ferro quadrada molt fina de dimensions 2.75×2.75 metres?

Porta

- Amplada = 2 m
- Alçada = $2{,}5$ m
- Diagonal de la porta:

$$D_{\text{porta}} = \sqrt{2^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{10{,}25} \approx 3{,}20\,\text{m}.$$

Làmina quadrada

- Costat = $2{,}75$ m
- Diagonal de la làmina:

$$D_{\text{làmina}} = 2{,}75 \cdot \sqrt{2} \approx 3{,}89\,\text{m}.$$

Comparació

- Si **la làmina entra recta**, és a dir, tota dins del pla de la porta, necessitem que la seva diagonal ≤ diagonal de la porta.
  Però aquí:

$$3{,}89 > 3{,}20,$$

així que **no hi cap en aquest sentit**.

Però... i si la inclinem?

- Una porta no és només un rectangle pla: la làmina es pot **inserir inclinada** (entrar per una cantonada i girar mentre travessa l'obertura).
- En aquest cas, el criteri és diferent: cal comprovar si hi ha prou espai dins del volum 3D del contenidor per maniobrar.
- La diagonal espacial del contenidor (amplada 2, alçada 2,5, profunditat 3) és:

$$D_{3D} = \sqrt{2^2 + 2{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{19{,}25} \approx 4{,}39\,\text{m}.$$

Com que $4{,}39 > 3{,}89$, **sí que hi ha prou espai dins** per girar la làmina.

- A més, matemàticament existeix un angle d'inclinació que fa que la projecció de la diagonal del quadrat sobre el pla de la porta sigui ≤ $3{,}20$. Això garanteix que pot passar per la porta.