Problema B1 model 1 juliol 2025 Illes Balears (àlgebra MAT).

Problema B1. — Donat el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1, \\ ky + z = 0, \\ 3x - y - z = 0, \end{cases}$$

on k és un nombre real qualsevol.

(a) [**1.5 punts**] Discuteix, segons el paràmetre k, el nombre de solucions que té el sistema.

(a) Discussió segons k: nombre de solucions

Coeficients i determinant:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = -k^2 + k + 3 = -(k^2 - k - 3).$$

- Si $\det A \neq 0 \iff k^2 - k - 3 \neq 0$, el sistema té **una única solució**.
- Si $\det A = 0 \iff k = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, cal mirar la compatibilitat. Ho veurem a l'eliminació (a sota): en aquests valors apareix l'equació $0 \cdot y = 1$, que és impossible. Per tant, el sistema és **incompatible** (cap solució) per

$$k = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{o} \quad k = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Conclusió (a):

- **Única solució** si $k \notin \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$.
- **Cap solució** si $k \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \right\}$.
- **Cap cas** de solucions infinites.

(b) [**1 punt**] Resol el sistema quan sigui possible.

(b) Resolució quan sigui possible

Eliminació directa:

1. De la 2a: $z = -k\,y$.
2. Substitueix a la 3a:

$$3x - y - (-ky) = 0 \implies 3x + (k-1)y = 0 \implies 3x = (1-k)y \implies x = \frac{1-k}{3}\,y.$$

3. Substitueix a la 1a:

$$k\left(\frac{1-k}{3}y\right) + y = 1 \implies \left(\frac{k(1-k)}{3} + 1\right)y = 1 \implies \frac{-k^2+k+3}{3}\,y = 1.$$

- Si $-k^2+k+3 \neq 0$ (és a dir, $k^2-k-3 \neq 0$):

$$y = \frac{3}{-k^2+k+3} = -\frac{3}{k^2-k-3},$$

$$x = \frac{1-k}{3}\,y = \frac{k-1}{k^2-k-3}, \qquad z = -k\,y = \frac{3k}{k^2-k-3}.$$

- Si $-k^2+k+3 = 0$ (és a dir, $k = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$), l'equació anterior queda $0 \cdot y = 1$, **contradicció** $\Rightarrow$ **cap solució.**

Solució final (quan existeix)

Per $k \notin \left\{\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$:

$$\boxed{x = \frac{k-1}{k^2-k-3}, \quad y = -\frac{3}{k^2-k-3}, \quad z = \frac{3k}{k^2-k-3}.}$$

I per $k = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$: **el sistema no té solució.**