

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$? (1 pt)

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$?

Comprovem AB i BA :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Per tant,

$$\boxed{A = B^{-1} \quad \text{i} \quad B = A^{-1}.}$$

b) Calcula x tal que $Ax = v$.

(1 pt)

b) Calcula x tal que $Ax = v$

Com que $A^{-1} = B$,

$$x = A^{-1}v = Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 5 \\ -5 \cdot 1 - 3(-1) + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

c) Amb el valor de x de l'apartat anterior, calcula y tal que $B^2y = x$. (1 pt)

c) Amb eixe x , calcula y tal que $B^2y = x$

De $B^2y = x$, multipliquem a l'esquerra per $B^{-1} = A$:

$$By = Ax.$$

Tornem a multiplicar per $B^{-1} = A$:

$$y = A(By) = A(Ax) = A^2x.$$

Calculem en dos passos:

$$1. Ax = v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$2. A(Ax) = Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \cdot 1 + 4(-1) + 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + 3(-1) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$