

Problema B1. — Una empresa de construcció necessita comprar diferents matèries primeres per elaborar els seus productes. Es construeixen 4 productes diferents, els quals requereixen una certa quantitat de fusta (que té un cost de x €/kg), de ferro (que té un cost de y €/kg) i de plàstic (que té un cost de z €/kg). Per a l'elaboració dels diferents productes s'ha recopilat la següent informació sobre el cost en matèries primeres:

$$\text{Producte 1: } 2x + y - z = 40 \text{ €},$$

$$\text{Producte 2: } x - y + 2z = 90 \text{ €},$$

$$\text{Producte 3: } x + 2y = 70 \text{ €},$$

$$\text{Producte 4: } x - y + z = 50 \text{ €}.$$

(a) [0.5 punts] Descriu què significa l'equació del producte 1.

(a) Interpretació de l'equació del Producte 1

L'equació

$$2x + y - z = 40$$

significa que el **cost total en matèries primeres** per fabricar el **Producte 1** és **40 €**. En el model proposat:

- es valoren **2 kg de fusta** a x €/kg (aportació $2x$ €),
- **1 kg de ferro** a y €/kg (aportació $+y$ €),
- i apareix el terme $-z$ € associat al plàstic segons l'expressió donada, de manera que el balanç total és 40 €.

- (b) [2 punts] Amb les dades de què disposem, és possible calcular el preu del kg de cada matèria primera? És a dir, calcular x , y , z ? Justifica la teva resposta.

(b) Càlcul de x , y , z (preus €/kg) amb la regla de Cramer

Triem tres equacions independents (per exemple P2, P3 i P4) i escrivim el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ amb $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 90 & (\text{P2}) \\ x + 2y + 0z = 70 & (\text{P3}) \\ x - y + z = 50 & (\text{P4}) \end{cases} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Determinant del sistema

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 6 = -3 \neq 0.$$

Com que $\det(A) \neq 0$, el sistema és **compatible determinat** i podem aplicar Cramer.

Determinants de Cramer

- Per a x (substituïm la 1a columna per $\mathbf{b}$):

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 90 & -1 & 2 \\ 70 & 2 & 0 \\ 50 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 90 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 70 & 0 \\ 50 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 70 & 2 \\ 50 & -1 \end{vmatrix} = 180 + 70 - 340 = -90.$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-90}{-3} = 30 \text{ €/kg.}$$

- Per a y (substituïm la 2a columna per $\mathbf{b}$):

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 90 & 2 \\ 1 & 70 & 0 \\ 1 & 50 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 70 & 0 \\ 50 & 1 \end{vmatrix} - 90 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 70 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} = 70 - 90 - 40 = -60.$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-60}{-3} = 20 \text{ €/kg.}$$

- Per a z (substituïm la 3a columna per **b**):

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 90 \\ 1 & 2 & 70 \\ 1 & -1 & 50 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 70 \\ -1 & 50 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 70 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} + 90 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 170 - 20 - 270 = -120.$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-120}{-3} = 40 \text{ €/kg.}$$

Verificació amb l'equació del Producte 1

$$2x + y - z = 2 \cdot 30 + 20 - 40 = 40 \text{ €} \quad (\text{es compleix}).$$

Conclusió

$x = 30 \text{ €/kg}, \quad y = 20 \text{ €/kg}, \quad z = 40 \text{ €/kg.}$
--

El sistema està ben determinat (determinant -3) i la solució és única; a més, la quarta equació (Producte 1) és coherent amb aquests valors.