Problema B2 model 1 juliol 2025 Illes Balears (àlgebra MACS).

Problema B2. — Considera les matrius quadrades A, B, M, i N de mida 3×3.

a) Calcula tots els valors de x tals que $A^2 = A$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1 pt)

a) **Trobar x perquè $A^2 = A$**, amb

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcular $A^2 - A = \mathbf{0}$. Si fem el producte (organitzo entrada a entrada), obtenim:

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 9x + 18 & x^2 + 6x + 8 & 6x + 12 \\ 9x + 18 & x^2 + 8x + 12 & 6x + 12 \\ 0 & -4x - 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perquè sigui la matriu nul·la, totes les entrades han de ser zero. Això dóna el sistema:

$$\begin{cases} 9x + 18 = 0 \\ x^2 + 6x + 8 = 0 \\ 6x + 12 = 0 \\ x^2 + 8x + 12 = 0 \\ -4x - 8 = 0 \end{cases}$$

De la primera (o la tercera o la cinquena) ja surt $x = -2$. Comprovem a les quadràtiques:

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4) \Rightarrow x = -2 \text{ o } -4,$$

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6) \Rightarrow x = -2 \text{ o } -6.$$

La intersecció de totes les condicions és $x = -2$ (els altres valors fallen a les equacions lineals).

Resposta (a): $x = -2$.

b) Troba una matriu B invertible, tal que $B^2 = B$. **(1 pt)**

b) **Una matriu invertible B amb $B^2 = B$.**

Si B és invertible i idempotent,

$$B^2 = B \;\Rightarrow\; B^{-1}B^2 = B^{-1}B \;\Rightarrow\; B = I.$$

És a dir, l'única idempotent invertible és la identitat.

Resposta (b): $B = I_3$ (la identitat de 3×3).

c) Donades dues matrius M i N invertibles tals que $M^2 = M$ i $N^2 = N$, construïm la matriu següent: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. És cert que $C^2 = C$? **(1 pt)**

c) **Si M, N són invertibles amb $M^2 = M$ i $N^2 = N$, i $C = NMN^{-1}$, és cert que $C^2 = C$?**

Sí. L'argument general (no cal que N sigui idempotent) és:

$$C^2 = (NMN^{-1})(NMN^{-1}) = NM^2N^{-1} = NMN^{-1} = C,$$

on hem usat $M^2 = M$. Per tant, C és també idempotent.
(Observació: com que M és invertible i idempotent, de fet $M = I$; igual per N. En aquest cas, trivialment $C = I$ i $C^2 = C$. Però el raonament de similitud anterior mostra el resultat en general per a qualsevol invertible N.)

Resposta (c): Sí, sempre es compleix $C^2 = C$.