

Problema B2. — Estàs gestionant una parada de menjar i begudes en un partit de bàsquet. Vens frànkfurts, hamburgueses i refrescs. Cada frànkfurt costa 3.50€, cada hamburguesa costa 4€ i cada refresc costa 1.50€. Al final de la nit, ens demanen reportar quants frànkfurts, hamburgueses i refrescs s'han venut.

- (a) [1 punt] Ho podries reportar sabent que has fet un total de 328€ i has venut 132 articles entre frànkfurts, hamburgueses i refrescs? Justifica la resposta.

Siguin f = nombre de frànkfurts, h = nombre d'hamburgueses, r = nombre de refrescs.

Preus: frànkfurt = 3,50€, hamburguesa = 4€, refresc = 1,50€.

Les dades donen el sistema:

$$\begin{cases} f + h + r = 132, \\ 3,5f + 4h + 1,5r = 328. \end{cases}$$

Multipliquem la segona equació per 2 per evitar decimals:

$$7f + 8h + 3r = 656.$$

Substituïm $r = 132 - f - h$ (de la primera equació) a la segona:

$$7f + 8h + 3(132 - f - h) = 656.$$

Calculant:

$$7f + 8h + 396 - 3f - 3h = 656 \implies 4f + 5h = 260.$$

Així hem reduït el problema a la **equació diofàntica**:

$$4f + 5h = 260, \quad f, h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Per resoldre-la observem la congruència mòdul 5:

$$4f \equiv 260 \pmod{5} \implies 4f \equiv 0 \pmod{5}.$$

Com que 4 té invers en $\mathbb{Z}_5$, això implica $f \equiv 0 \pmod{5}$. Per tant podem posar $f = 5t$ amb $t \in \mathbb{Z}$.

Substituïm:

$$4(5t) + 5h = 260 \implies 20t + 5h = 260 \implies h = 52 - 4t.$$

$$\text{I } r = 132 - f - h = 132 - 5t - (52 - 4t) = 80 - t.$$

Per tant les solucions no negatives són:

$$(f, h, r) = (5t, 52 - 4t, 80 - t),$$

amb t enter tal que $f, h, r \geq 0$. Les condicions donen:

$$t \geq 0, \quad 52 - 4t \geq 0 \Rightarrow t \leq 13, \quad 80 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 80.$$

Així $t \in \{0, 1, 2, \dots, 13\}$.

Per tant **no hi ha una única solució**: hi ha **14** solucions possibles (una per cada $t = 0, \dots, 13$). Algunes solucions d'exemple:

- $t = 0: (f, h, r) = (0, 52, 80)$.
- $t = 1: (f, h, r) = (5, 48, 79)$.
- ...
- $t = 13: (f, h, r) = (65, 0, 67)$.

Comprovació d'ingressos per $t = 13$: $3,5 \cdot 65 + 4 \cdot 0 + 1,5 \cdot 67 = 227,5 + 0 + 100,5 = 328 \text{ €}$.

(a) Conclusió: amb només 328 € i 132 articles **no** es pot determinar de manera única quants articles de cada tipus s'han venut (hi ha 14 solucions enters no negatives).

(b) [1.5 punts] Si, a més, sabem que s'han venut 20 hamburgueses. Quants frànkfurts i quants refrescs s'han venut?

(b) Si a més sabem que $h = 20$, ho apliquem a $4f + 5h = 260$:

$$4f + 5 \cdot 20 = 260 \Rightarrow 4f = 160 \Rightarrow f = 40.$$

$$r = 132 - 40 - 20 = 72.$$

Per tant, amb $h = 20$:

$f = 40, \quad h = 20, \quad r = 72.$
