

Problema B2. — Siguin A i B dues matrius 3×3 tals que A és invertible. Sigui I la matriu identitat de dimensió 3×3 .

(a) [1 punt] Sabent que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en funció de I i B .

(a) Expressar A^{-1} en funció d' I i B

Partim de

$$AB + I = A \implies AB = A - I.$$

Multiplicant per A^{-1} a l'esquerra:

$$B = A^{-1}(A - I) = A^{-1}A - A^{-1} = I - A^{-1}.$$

Per tant,

$$\boxed{A^{-1} = I - B.}$$

(b) [1.5 punts] Sabent que A i la seva inversa A^{-1} són tals que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcula la matriu B que satisfà la igualtat $AB + I = A$. És B invertible? Justifica la resposta.

(b) Donades A i A^{-1} , calcular B tal que $AB + I = A$. És B invertible?

Tenim

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De l'apartat (a), $B = I - A^{-1}$. Així doncs,

$$B = I - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Comprovació ràpida (conceptual): si $B = I - A^{-1}$, llavors

$$AB + I = A(I - A^{-1}) + I = A - AA^{-1} + I = A - I + I = A,$$

com cal.

És B invertible? Calculem el determinant (per evitar fraccions, considerem $C = 2B$):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(B) = \frac{\det(C)}{2^3}.$$

Com que la primera fila té zeros:

$$\det(C) = (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-1)(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) = (-2)(-1)(1 + 3) = 8.$$

Així,

$$\det(B) = \frac{8}{8} = 1 \neq 0 \implies \boxed{B \text{ és invertible}}.$$

Resum:

$$A^{-1} = I - B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \det(B) = 1 \text{ (invertible)}.$$