Problema C1 model 1 juliol 2025 Illes Balears (anàlisi MACS).

Problema C1. — Restringits al domini $x \in [0,20]$, considera les tres funcions següents:

$$f(x) = x(10-x), \qquad g(x) = 125 - 20x, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \le x \le 15, \\ g(x) & \text{si } 15 < x \le 20. \end{cases}$$

a) Per a quins x es té que $f(x) = g(x)$? Per a quins x es té que $f'(x) = g'(x)$? **(1 pt)**

Dades

$f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$,
$g(x) = 125 - 20x$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le 15, \\ g(x), & 15 < x \le 20. \end{cases}$$

a) Punts amb $f(x) = g(x)$ i amb $f'(x) = g'(x)$

- **Igualtat de valors:**

$$10x - x^2 = 125 - 20x \iff x^2 - 30x + 125 = 0$$

$\Delta = 900 - 500 = 400 \Rightarrow x = \dfrac{30 \pm 20}{2} \in \{5, 25\}$.
Al domini $[0,20]$: $x = 5$ (el 25 cau fora).

- **Igualtat de derivades:**

$$f'(x) = 10 - 2x, \quad g'(x) = -20; \quad 10 - 2x = -20 \Rightarrow x = 15.$$

Al domini: $x = 15$.

b) Estudia la continuïtat de la funció $h(x)$. **(1 pt)**

b) Continuïtat d'h

- A $[0, 15)$ i $(15, 20]$ és contínua (polinomis).
- Al punt de cosit $x = 15$:

$$\lim_{x\to 15^-} h(x) = f(15) = 15(10-15) = -75, \qquad \lim_{x\to 15^+} h(x) = g(15) = 125 - 20 \cdot 15 = -175.$$

Com que $-75 \neq -175$, **hi ha discontinuïtat de salt a** $x = 15$ i $h(15) = f(15) = -75$.

c) És la funció $h(x)$ derivable? En quins intervals és creixent? **(1 pt)**

c) Derivabilitat i intervals de creixement

- **Derivabilitat**: No és derivable a $x = 15$ perquè no és contínua allí (encara que $f'(15) = g'(15) = -20$). És derivable a $[0, 15)$ i a $(15, 20]$.
- **Creixement**:
  - A $[0, 15]$: $f'(x) = 10 - 2x > 0 \iff x < 5$.
    ⇒ **creixent a** $[0, 5]$ i decreixent a $[5, 15]$.
  - A $(15, 20]$: $g'(x) = -20 < 0$.
    ⇒ **decreixent a** $[15, 20]$.

Resum

a) $f = g$ a $x = 5$ (al domini). $f' = g'$ a $x = 15$.

b) h és contínua a tot arreu **excepte** a $x = 15$ (salt).

c) h **no** és derivable a $x = 15$; és creixent només a $[0, 5]$ i decreixent a $[5, 20]$ amb el trencament al 15.