Problema C1 model 1 juliol 2025 Illes Balears (anàlisi MAT).

Problema C1. — Donada la corba $y(x) = x^2 - 4$.

(a) **[1 punt]** Calcula la recta tangent, r, a la corba y pel punt $(2,0)$.

(a) Recta tangent pel punt $(2, 0)$

1. **Comprovem que el punt pertany a la corba:**

$$y(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2,0) \in \text{corba}.$$

2. **Càlcul de la pendent de la tangent:**

$$y'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad y'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

3. **Equació de la tangent en $(2, 0)$:**

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 0 = 4(x - 2).$$

$$\boxed{r:\ y = 4x - 8}$$

(b) **[1.5 punts]** Calcula l'àrea de la regió compresa entre la corba y, l'eix OY i la recta r.

(b) Àrea de la regió compresa

Volem l'àrea compresa entre:

- la **paràbola** $y = x^2 - 4$,
- l'**eix OY** ($x = 0$),
- la **recta tangent** $y = 4x - 8$.

1. Punt d'intersecció de la paràbola i la recta

Resolem:

$$x^2 - 4 = 4x - 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 0.$$

Per tant, **només es tallen en** $(2, 0)$.

2. Punt d'intersecció de la recta amb l'eix OY

Per $x = 0$: $y = 4(0) - 8 = -8$.

→ Punt: $(0, -8)$.

3. Punt d'intersecció de la corba amb l'eix OY

Per $x = 0$: $y = 0^2 - 4 = -4$.

→ Punt: $(0, -4)$.

4. Delimitació de la regió

La regió és el recinte amb vèrtexs:

- $(0, -4)$ sobre la paràbola,
- $(0, -8)$ sobre la recta,
- $(2, 0)$ punt comú.

→ És la zona **tancada entre la corba i la recta, des de** $x = 0$ **fins a** $x = 2$.

5. Determinar qui és a sobre i qui és a sota

A $x = 0$:

- Paràbola: $y = -4$
- Recta: $y = -8$

$-4 > -8$, per tant la **paràbola està per sobre de la recta** en $[0, 2]$.

6. Àrea com a integral de diferència

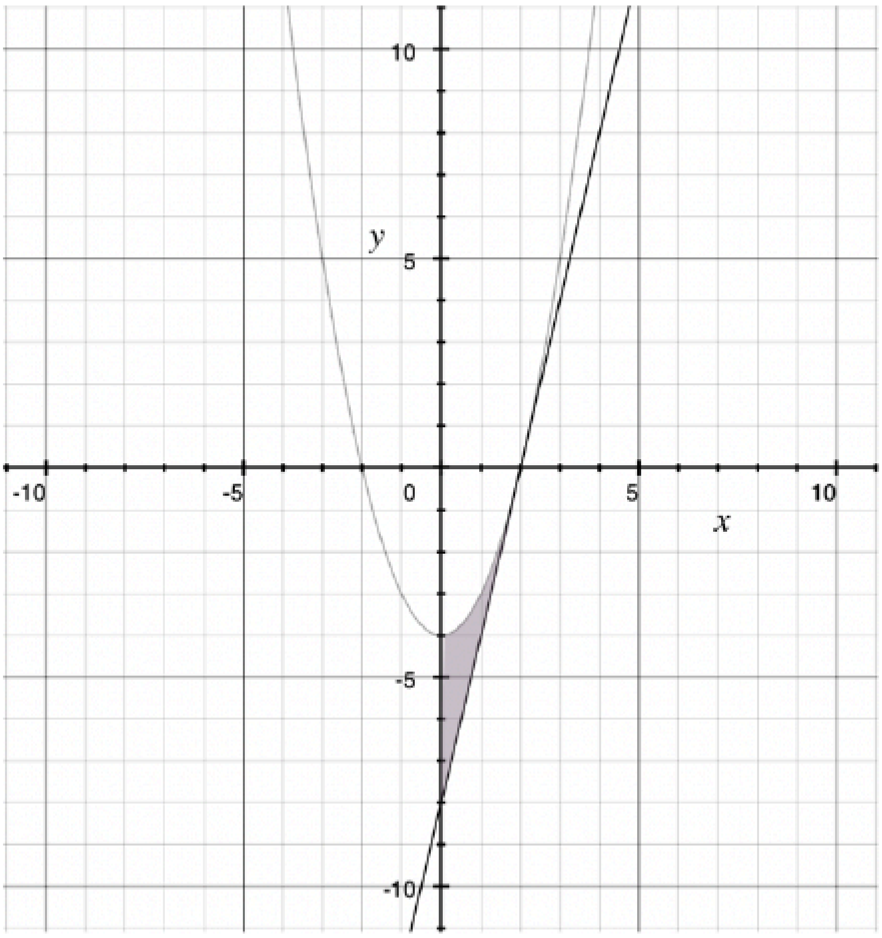
$$A = \int_0^2 \Big[(x^2 - 4) - (4x - 8)\Big]\,dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx.$$

7. Càlcul de l'integral

$$\int (x^2 - 4x + 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x.$$

Avaluem de 0 a 2:

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - 0 = \frac{8}{3}.$$



Resultats finals

(a) La recta tangent és:

$$\boxed{y = 4x - 8}$$

(b) L'àrea de la regió compresa és:

$$\boxed{\frac{8}{3}} \text{ unitats quadrades.}$$