

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$, per a $x \in [-1, \infty)$.

- a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts. (2 pt)

a) Gràfica esquemàtica, valors i extrems

- **Valors especials**

- $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -1 - 3 = -4.$
- $f(0) = 0.$
- $f(2) = 8 - 12 = -4.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$

- **Derivada i monotonia**

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Punts crítics: $x = 0$ i $x = 2$.

- En $(-1, 0)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ creixent.
- En $(0, 2)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow$ decreixent.
- En $(2, \infty)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ creixent.

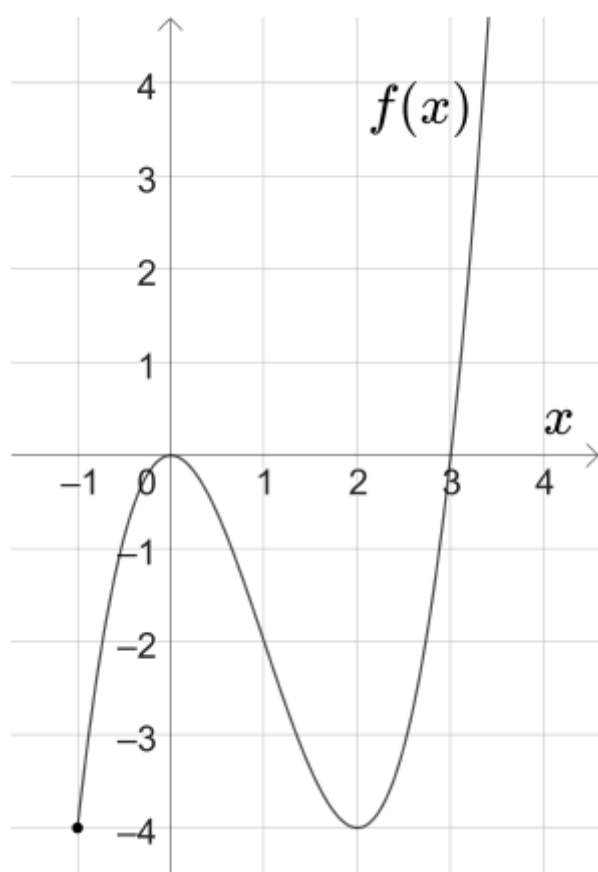
- **Extrems**

- A $x = 0$: canvia de $+$ a $- \Rightarrow$ màxim local $f(0) = 0.$
- A $x = 2$: canvia de $-$ a $+$ $\Rightarrow$ mínim local $f(2) = -4.$

- **Extrems absoluts al domini $[-1, \infty)$**

- **Mínim absolut:** $f = -4$ assolit a dos punts: $x = -1$ (extrem del domini) i $x = 2$.
- **Màxim absolut:** no existeix (la funció és no acotada superiorment, $f(x) \rightarrow +\infty$).

Esbós de la corba (orientació): comença a $(-1, -4)$, puja fins al màxim $(0, 0)$, baixa fins al mínim $(2, -4)$ i torna a pujar cap a $+\infty$, amb tall a l'eix OX en $x = 0$ (arrel doble en $x = 0$ i arrel en $x = 3$ fora d'aquest apartat, però al domini s'hi veu el tall a 0).



- b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent? (1 pt)

b) Tangent en $x = 1$ i pendent

- Pendent: $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$.
- Punt de contacte: $f(1) = 1 - 3 = -2$.
- Recta tangent:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 1}.$$

- Pendent: $\boxed{-3}$.

