

Problema C1. — La funció que descriu l'altitud A d'un terreny (en metres) sobre un tram de 500 metres és

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

on $x \in [0, 500]$ és la distància recorreguda horitzontalment, mesurada en metres.

(a) [1.5 punts] Demostra que existeix almenys un punt x on l'altitud és 0 dins del tram considerat.

Indicació: es pot fer ús del teorema de Bolzano.

a) Existència d'almenys una arrel (Bolzano)

- A és un polínom $\Rightarrow$ contínua a $[0, 500]$.
- $A(0) = 200 > 0$.
- $A(500) = -0,0001 \cdot 500^3 + 0,05 \cdot 500^2 - 4 \cdot 500 + 200 = -1800 < 0$.

Com que hi ha **canvi de signe** i A és contínua, pel **teorema de Bolzano** existeix almenys un $x_0 \in (0, 500)$ tal que $A(x_0) = 0$.

- (b) [1 punt] Estudia els punts crítics de la funció i el seu creixement/decreixement per concloure si aquest punt és únic o no. Ho és? Justifica la resposta.

b) Punts crítics, monotonia i unicitat

Derivada:

$$A'(x) = -0,0003x^2 + 0,1x - 4.$$

Punts crítics resolent $A'(x) = 0$:

$$-0,0003x^2 + 0,1x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-0,1 \pm \sqrt{0,1^2 - 4(-0,0003)(-4)}}{2(-0,0003)} = \frac{-0,1 \pm \sqrt{0,0052}}{-0,0006}.$$

Numèricament:

$$x_1 \approx 46,48, \quad x_2 \approx 286,85.$$

Com que el coeficient líder de A' és **negatiu**, $A'(x) < 0$ fora de (x_1, x_2) i $A'(x) > 0$ dins:

- **Decreixent** a $[0, x_1)$,
- **Creixent** a (x_1, x_2) ,
- **Decreixent** a $(x_2, 500]$.

Valors de A als punts rellevants:

$$A(x_1) \approx 112,06 > 0 \quad (\text{mínim local}), \quad A(x_2) \approx 806,46 > 0 \quad (\text{màxim local}).$$

Conclusió d'unicitat:

- A $[0, x_2]$ la funció és **positiva** (comença en $A(0) = 200 > 0$, baixa fins a $A(x_1) > 0$, puja fins a $A(x_2) > 0$).
- Des de x_2 fins a 500, A **decreix estrictament** i passa de $A(x_2) > 0$ a $A(500) < 0$.
 $\Rightarrow$ En el tram $(x_2, 500)$ hi ha **exactament una** intersecció amb l'eix OX .

Per tant, l'arrel en $[0, 500]$ és **única**. (Si es vol una aproximació numèrica, es troba a $x \approx 415,28$ m.)

