

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 10^x + x^{10}$, per a $x \in (0, +\infty)$.

a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1 pt)

a) Límits

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (10^x + x^{10}) = 10^0 + 0 = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (l'exponencial 10^x domina qualsevol polinomi, i de fet ambdós termes creixen a ∞).

Resposta (a): $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

b) Calcula $f'(x)$.

(1 pt)

b) Derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(10^x) + \frac{d}{dx}(x^{10}) = (\ln 10) 10^x + 10x^9.$$

Resposta (b): $f'(x) = (\ln 10) 10^x + 10x^9$.

c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x) dx$. (1 pt)

c) Càlcul de $\int_0^1 f'(x) dx$

Com que f és derivable a $(0, 1]$ i té límit finit en 0^+ ($f(0^+) = 1$), la integral és **impròpia** però convergent. Per Teorema Fonamental del Càlcul (versió impròpia):

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (10^1 + 1^{10}) - (10^0 + 0^{10}) = (10 + 1) - (1 + 0) = 10.$$

(Equivalentment, integrant terme a terme:

$\int (\ln 10) 10^x dx = 10^x$ i $\int 10x^9 dx = x^{10}$, així que $[10^x + x^{10}]_0^1 = 10$.)

Resposta (c): $\int_0^1 f'(x) dx = 10$.